目　录

第一章　预备知识

§ 1.1　记　　号

本书采用以下记号。

以$\mathbf{Z}$，$\mathbf{Q}$，$\mathbf{R}$，$\mathbf{C}$ 分别表示整数集，有理数集，实数集和复数集；而以$\mathbf{H}$表示四元数（见 § 2.4）的集合。

依照惯例，以$\mathbf{R}^n$表示 n维欧氏空间，空间中点 $x=(x_1, \cdots, x_n)$ 的范数

$$|x| = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2}$$

顺便指出，当$y>0$时，我们约定$y^{1/2}$表示y的正平方根。以e_1，$\cdots$，e_n表示$\mathbf{R}^n$的标准基，即$e_1=(1, 0, \cdots, 0)$ 等等。特别要提一下$\mathbf{R}^n$的子集

$$B^n = \{x \in \mathbf{R}^n : |x| < 1\}$$

$$H^n = \{x \in \mathbf{R}^n : x_n > 0\}$$

和

$$S^{n-1} = \{x \in \mathbf{R}^n : |x| = 1\}$$

对于空间$\mathbf{C}$（与$\mathbf{R}^2$同），则以Δ和$\partial\Delta$分别表示单位圆盘和单位圆周。

作为一个例子，记号$x \mapsto x^2$表示把x映射为x^2的一个函数；函数的定义域将由上下文交代清楚。函数（即映射或变换）的符号置于所作用对象的左边；为了简便，象点$f(x)$常写成fx（即省去括号）。两个函数的复合记为fg，此即映

射$x\mapsto f(g(x))$。

若$A\cap B\neq\phi$，则称集合A与B相交（或称A交B）。说性质$P(n)$对几乎一切的n成立（或说对所有充分大的n成立），意指该性质只对n的一个有限集不成立。

§ 1.2 不等式

本书要引用的所有不等式都可从Jensen不等式导出。Jensen不等式的证明可参看〔90〕第三章。

Jensen不等式 设μ是集X上的一个正测度，$\mu(X)=1$。若$f:X\to(a,b)$为μ可积，$\phi:(a,b)\to\mathbf{R}$是任一凸函数，则

$$\phi\left(\int_X f\mathrm{d}\mu\right)\leqslant\int_X(\phi f)\,\mathrm{d}\mu \qquad (1.2.1)$$

作为其特例，Jensen不等式包含Hölder不等式

$$\int_X fg\mathrm{d}\mu\leqslant\left(\int_X f^2\mathrm{d}\mu\right)^{1/2}\left(\int_X g^2\mathrm{d}\mu\right)^{1/2}$$

这一不等式的离散形式是Cauchy-Schwarz不等式

$$|\Sigma a_ib_i|\leqslant(\Sigma|a_i|^2)^{1/2}(\Sigma|b_i|^2)^{1/2}$$

此处a_i，b_i是实数。当诸量为复数时不等式仍成立，并且复的不等式可从实的不等式推出，当然也可以用初等方法直接证明。

取$X=\{x_1,\cdots,x_n\}$，$\phi(x)=e^x$，知（1.2.1）式蕴含算术一几何均值不等式

$$y_1^{\mu_1}\cdots y_n^{\mu_n}\leqslant\mu_1y_1+\cdots+\mu_ny_n$$

其中μ_j是μ在x_j处所具有的质量，$y_j=\phi f(x_j)$。

为了应用（1.2.1）式，需要提供种种凸函数。熟知ϕ成为凸函数的充分条件是在(a,b)内$\phi^{(2)}\geqslant 0$，因此cot, tan, $\cot^2$等都是$(0,\pi/2)$上的凸函数。这就推出，例如，当θ_1, …, θ_n都属于$(0,\pi/2)$时有

$$\cot\left(\frac{\theta_1+\cdots+\theta_n}{n}\right)\leqslant\frac{\cot\theta_1+\cdots+\cot\theta_n}{n} \tag{1.2.2}$$

作为另一个应用，我们来证明，若x, y属于$(0,\pi/2)$并且$x+y<\pi/2$，则有

$$\tan x\tan y\leqslant\tan^2\left(\frac{x+y}{2}\right) \tag{1.2.3}$$

记$w=(x+y)/2$，由于

$$\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}=\tan(x+y)$$

$$=\frac{2\tan w}{1-\tan^2 w}$$

并且因tan是凸函数又可从（1.2.1）推出

$$\tan x+\tan y\geqslant 2\tan w$$

两式结合即得（1.2.3）式（注意$\tan^2 w<1$，两个分式的分母都是正的）。

§ 1.3 代 数

我们假定读者熟悉有关群的基本概念和向量空间的知识。例如，我们要用到关于$\{1, 2, \cdots, n\}$的置换群S_n的一些基本事实，特别是S_n可由对换生成的事实。又如，我们

要提请读者注意如下事实：若$\theta: G\to H$是群G到群H的同态，则θ的核K是G的正规子群，商群G/K与H同构。

设g是群G的一个元素，称元素hgh^{-1}（$h\in G$）为共轭于g的元素。G可被划分成一些共轭类$\{hgh^{-1}: h\in G\}$。顺便指出，映射$x\mapsto xgx^{-1}$和$x\mapsto gxg^{-1}$（都是G到G的自映射）在本书中起着特殊的作用。g和h的换位子是

$$[g, h]=ghg^{-1}h^{-1}$$

这可看成g与g^{-1}的共轭元素的复合。

设群G具有子群G_i（i属于某个指标集），诸G_i的并生成G，并且不同的G_i仅以恒等元素为唯一的公共元素。则G是诸G_i的自由乘积当且仅当G中每个元素g均可由一组元素$g_1, \cdots, g_n$表示并且表示式唯一，而且这n个元素中任何两个相邻元素不属于同一个子群G_j。这样的例子在本书中可以找到。

§ 1.4 拓 扑

我们还假定读者具有足够的拓扑学知识，例如关于Hausdorff空间，连通空间，紧空间，乘积空间及同胚的知识。特别指出，若f是紧空间X到Hausdorff空间Y的一一连续映射，则f是一个同胚。

作为拓扑的特例，我们要提一下离散拓扑（此种拓扑空间的每一子集都是开集）和由集X的度量ρ导出的拓扑。一个度量空间(X, ρ)到另一个度量空间(Y, σ)的等距映射f满足

$$\sigma(fx, fy)=\rho(x, y)$$

并且必定是同胚映射。

我们简要地讨论一下由一个给定的函数所诱导的商拓扑结构。

设X是任一拓扑空间，Y是任一非空集合，f: $X \to Y$是任意给定的函数。Y的子集V称为开集当且仅当$f^{-1}(V)$是X的开子集；如此确定的Y的开集族是Y上的一个拓扑$\mathscr{T}_f$，称之为由f诱导的商拓扑。关于这一拓扑，f当然是连续的。

常常要用到关于商拓扑的下述两个结果：

命题1.4.1　设X是拓扑空间，f把X映射为Y；$\mathscr{T}$是Y上任一拓扑，$\mathscr{T}_f$是Y上由f诱导的商拓扑。

(1)　若f: $X \to (Y, \mathscr{T})$连续，则$\mathscr{T} \subset \mathscr{T}_f$。

(2) 若f: $X \to (Y, \mathscr{T})$连续并且为开映射，则$\mathscr{T} = \mathscr{T}_f$。

[证]　设f: $X \to (Y, \mathscr{T})$连续。若V属于$\mathscr{T}$，则$f^{-1}(V)$是X的开集，从而V属于$\mathscr{T}_f$。如再设f: $X \to (Y, \mathscr{T})$是开映射，则因V属于$\mathscr{T}_f$意味着$f^{-1}(V)$是X的开集而知$f(f^{-1}V)$属于$\mathscr{T}$。又因f是满射，$f(f^{-1}V) = V$，因此$\mathscr{T}_f \subset \mathscr{T}$。 □

命题1.4.2　设f把X映入Y，X和Y均为拓扑空间而且Y具有商拓扑$\mathscr{T}_f$。对于每个映射g: $Y \to Z$，相应定义一个映射$g_1 = gf$: $X \to Z$。则当且仅当g_1连续时g连续。

[证]　因f连续，故g连续意味着g_1连续。现在假定g_1连续。对于Z（当然假定它是拓扑空间）的开集V有

$$(g_1)^{-1}(V) = f^{-1}(g^{-1}V)$$

这是X的开集，由商拓扑的定义推出$g^{-1}(V)$是Y的开集，因此g连续。 □

商拓扑可代之以等价关系。若拓扑空间X依照某个等价关系R分成一些等价类〔x〕，则等价类空间X/R具有由映射$x \mapsto$〔x〕诱导的商拓扑。任何满映射f：$X \to Y$都能诱导出X的一个等价关系R：xRy当且仅当$f(x)=f(y)$。亦即Y与X/R可视为同一物。

例如，设G是拓扑空间X的自同胚群，f把X中每个元素x映射为X/G中的G轨道〔x〕。若赋予X/G以诱导商拓扑，则f：$X \to X/G$是连续映射。同时，f也是开映射；因为若V是X的开集，则集合

$$f^{-1}(fV)=\bigcup_{g \in G} g(V)$$

也是X的开集。

此外，熟悉覆盖空间与黎曼曲面的知识对阅读本书无疑是有益的，虽然本书大部份内容可独立于这些概念来阅读。这方面的内容，本书将在第六章作简略的讨论；需要作进一步了解的读者可参阅〔4〕，〔6〕，〔28〕，〔50〕，〔63〕，〔100〕。

§ 1.5 拓扑群

所谓**拓扑群**G，是指G既是一个群又是一个拓扑空间，并且这两种结构彼此相容即要求G到G的映射$x \mapsto x^{-1}$和$G \times G$到G的映射$(x, y) \mapsto xy$连续；当然此处赋予$G \times G$的拓扑是乘积拓扑。

所谓两个拓扑群同构，是指存在从一个拓扑群到另一个拓扑群的双射，它**既是**群的同构对应又是拓扑空间的同胚对应；这就是拓扑群的自然同化。

对于G中任意一点y，空间$G\times\{y\}$具有一个自然拓扑，它以$A\times\{y\}$为开集，其中A是G的开集。映射$x\mapsto(x,y)$是G到$G\times\{y\}$的同胚，映射$(x,y)\to xy$是$G\times\{y\}$到G的连续映射，由此可推出$x\mapsto xy$是G到自身的连续映射并且具有连续的逆映射$x\mapsto xy^{-1}$。因此，我们有如下初等而有用的结果。

命题1.5.1 对于G中一每点y，映射$x\mapsto xy$和$x\mapsto yx$都是G到自身的同胚。

若拓扑群G上的拓扑是离散拓扑，则称之为离散的拓扑群。于是，命题1.5.1有如下推论：

推论1.5.2 设G是拓扑群。若对于G中某点g，集合$\{g\}$是开集，则每个集合$\{y\}$（$y\in G$）都是开集，从而G是离散的。

给定一个拓扑群G，设a是G中某个元素，定义映射

$$\phi(x)=xax^{-1}$$

和

$$\psi(x)=xax^{-1}a^{-1}=[x,a]$$

显然，ϕ以a为唯一的不动点。对这些映射的叠代ϕ^n和ψ^n我们尤感兴趣，它们满足关系式

$$\phi^n(x)=\psi^n(x)a$$

这可归纳证明之，因为

$$\begin{aligned}\phi^{n+1}(x)&=[\psi^n(x)a]a[\psi^n(x)a]^{-1}\\&=\psi^n(x)a[\psi^n(x)]^{-1}\\&=\psi^{n+1}(x)a\end{aligned}$$

在某些情况下，多重换位子$\psi^n(x)$收敛于单位元

素[1]（与之等价的是$\phi^n(x)$收敛于ϕ的唯一不动点a）。如果所讨论的拓扑群是离散的，则必定对某个n有$\phi^n(x)=a$。这样的例子可以在〔106〕，〔111；引理3.2.5〕以及本书的第五章中见到。

最后需要指出，若G是拓扑群，H是G的正规子群，则G/H既有通常的商群结构又有商拓扑结构。

定理1.5.3 若H是拓扑群G的一个正规子群，则G/H按通常的结构是一个拓扑群。

关于这一定理的证明以及进一步的结果，可参看〔20〕，〔23〕，〔39〕，〔67〕，〔69〕和〔94〕。

§1.6 分 析

假定读者熟悉复平面子集上的解析函数的知识，这类函数把开集映射为开集。本书的主要研究对象*Möbius*变换和双曲函数就是这类函数的两个特例。

R^n的某个开子集到R^n的映射f称为在点x可微，如果

$$f(y)=f(x)+(y-x)A+|y-x|\varepsilon(y)$$

其中A是$n\times n$矩阵，当$y\to x$时$\varepsilon(y)\to 0$。

可微映射f称为在点x共形，如果A可以表示为正数量因子$\mu(x)$与正交矩阵B的乘积。通常依照$\det B$是正数或负数而分别称f为直接共形或间接共形。若f是平面区域间的解析映射，由柯西—黎曼方程知除去使$f^{(1)}(z)=0$的那些点外

[1] 原文误为恒等映射—译者注。

f为直接共形。

若D是R^n的子区域，λ是D上的一个密度函数（正连续函数），则定义

$$\rho(x,y)=\inf\int_{\gamma}\lambda(\gamma(t))\,|\dot{\gamma}(t)|\,\mathrm{d}t$$

其中$\dot{\gamma}$是γ的导数，下确界是就D内所有连接x和y的（光滑）曲线γ而取的。容易看出，ρ是D上的一个度量。事实上，函数ρ显然非负、对称、满足三角不等式并且有$\rho(x,x)=0$；只需要证明当$x\neq y$时$\rho(x,y)>0$，即可。为此选取以x为心的一个适当小的开球N，其半径为r。由连续性，不妨设λ在N上具有正的下界λ_0，$y\notin N$。因此，在γ的一段长度至少为r的弧上，λ的值不小于λ_0，于是有$\rho(x,y)>0$。

更一般地，设$\gamma=(\gamma_1,\cdots,\gamma_n)$是$D$内任一可微曲线，且函数

$$q(t)=\sum_{i,j}a_{ij}(\gamma t)\dot{\gamma}_i(t)\dot{\gamma}_j(t)$$

在D内除去使$\dot{\gamma}=0$的那些点外均取正值。则可仿照上述方法通过对$[q(t)]^{1/2}$求积来定义度量。这种度量拓扑是欧氏拓扑。

若f是D到D_1的共形双射，则有

$$\lim_{y\to x}\frac{|f(y)-f(x)|}{|y-x|}=\mu(x)$$

并且D_1具有从λ导出的密度σ，

$$\sigma(fx)=\frac{\lambda(x)}{\mu(x)}$$

因而得到一个导出度量ρ_1。事实上，f成为从(D,ρ)到

(D_1, ρ_1)的一个等距映射。顺便指出，如果$D = D_1$，并且则f

$$\lambda(fx)\mu(x) = \lambda(x)$$

是(D, ρ)到自身的等距映射。若用微分表达，该条件可写成

$$\lambda(y)\ |dy| = \lambda(x)\ |dx|, \qquad y = f(x)$$

例如，取$D = H^2$，$\lambda(z) = \dfrac{1}{\mathrm{Im}[z]}$

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

其中a，b，c，d是实数并且$ad - bc > 0$。则f把H^2映为自身，且由

$$\mathrm{Im}[fz] = \mathrm{Im}[z]\ |f^{(1)}(z)|$$

而知f是(H^2, ρ)到自身的等距映射；这就是H^2上的双曲度量。

我们还要用到单位圆盘Δ和上半平面H^2的Poisson核。对于Δ中的点z和$\partial\Delta$上的点ζ，Poisson核为

$$P_\Delta(z, \zeta) = \frac{1 - |z|^2}{|z - \zeta|^2}$$

显然，它作为z的函数在Δ内为正，在$\partial\Delta$上（点ζ除外）为零。由于

$$P_\Delta(z, \zeta) = \mathrm{Re}\left(\frac{\zeta + z}{\zeta - z}\right)$$

便知P_Δ是以ζ为极点的z的调和函数。

映射

$$f(z) = \frac{\zeta + z}{\zeta - z}$$

把Δ映成右半平面$\{z: \mathrm{Re}z > 0\}$，ζ对应∞，且有

$$\mathrm{Re}[f(z)] = P_\Delta(z,\zeta)$$

这就推出$P_\Delta(z,\zeta)$的阶层曲线是右半平面中平行虚轴的直线❶在f^{-1}映射下的象曲线，它们是Δ中与$\partial\Delta$切于ζ点的圆周。

Δ到自身的Möbius变换的最一般形式为

$$g(z) = \frac{az+\bar{c}}{cz+\bar{a}}, \quad |a|^2 - |c|^2 = 1$$

经简单计算得到

$$1 - |g(z)|^2 = |g^{(1)}(z)|(1-|z|^2)$$

又因g是 Möbius变换，有

$$|g(z)-g(\zeta)|^2 = |z-\zeta|^2 |g^{(1)}(z)|\,|g^{(1)}(\zeta)|$$

从而得到关系式

$$P_\Delta(gz, g\zeta)\,|g^{(1)}(\zeta)| = P_\Delta(z,\zeta)$$

半平面H^2的Poisson核为

$$P(z,\zeta) = \begin{cases} y & \text{若}\zeta=\infty \\ \dfrac{y}{|z-\zeta|^2} & \text{若}\zeta\neq\infty \end{cases}$$

请读者自己去讨论它的性质。

❶ 此处原文有误——译者注。

第二章 矩 阵

§ 2.1 非奇异矩阵

当$ad-bc\neq 0$时，2×2复矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{2.1.1}$$

对应于扩充复平面到自身的Möbius变换

$$g(z)=\frac{az+b}{cz+d}$$

由于这些变换是我们所要讨论的主要对象，因而有必要对2×2复矩阵类作些研究。

给定如（2.1.1）所示的矩阵A，其**行列式**为

$$\det(A)=ad-bc$$

称A为**非奇异**矩阵当且仅当$\det(A)\neq 0$时。若A是非奇异矩阵，则存在逆矩阵

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} \lambda d & -\lambda b \\ -\lambda c & \lambda a \end{pmatrix},\quad \lambda=(ad-bc)^{-1}$$

并且也是非奇异的。

对于任何矩阵A和B，有

$$\det(AB)=\det(A)\det(B)=\det(BA) \tag{2.1.2}$$

因而有

$$\det(BAB^{-1}) = \det(AB^{-1}B) = \det(A) \qquad (2.1.3)$$

非奇异的2×2复矩阵类关于通常的矩阵乘法是一个群，即一般线性群，记为$GL(2,C)$。我们将着重研究其中满足条件$\det(A)=1$的那些矩阵所组成的子群$SL(2,C)$，称之为特殊线性群。单位矩阵用I表示；有时为了强调矩阵的阶数，也用I_n表示$n\times n$单位矩阵。

本章的许多内容也适用于$n\times n$复矩阵。n阶矩阵的行列式可归纳定义之。n阶矩阵A非奇异且具有逆矩阵A^{-1}当且仅当$\det(A)\neq 0$时。恒等式（2.1.2）和（2.1.3）对于n阶矩阵仍然成立。

称$n\times n$实矩阵A为正交矩阵当且仅当对任何$x\in R^n$有

$$|x| = |xA|$$

这等价于条件$A^{-1}=A'$，此处A'是A的转置。由于$\det(A)=\det(A')$，当A为正交矩阵时显然有$\det(A)=1$或-1。我们以$O(n)$表示$n\times n$正交矩阵类。

对于C^n中的点$z=(z_1, \cdots, z_n)$，其范数为

$$|z| = [|z_1|^2+\cdots+|z_n|^2]^{1/2}$$

称$n\times n$复矩阵A为酉矩阵当且仅当对于任何$z\in C^n$有

$$|z| = |zA|$$

这等价于条件$A^{-1}=\bar{A}'$，此处$\bar{A}$表示将A的每个元素取共轭而得到的矩阵。

从几何的观点来看，下面的结果是很有意义的。

***Selberg*引理** 设G是$n\times n$复矩阵的有限生成群。则G必有不含非平凡有限阶元素的有限指数正规子群。

这一结果在本教科书中只用到一次，证明从略。读者可以

在〔92〕以及〔17〕，〔13〕中找到它的证明；也可参看〔16〕，〔27〕，〔31〕，〔35〕，〔85〕与〔104〕，但这些文献都是在离散群的范围内加以讨论。

习题 2.1

1. 证明矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

在$SL(2, C)$内互相共轭，但不是$SL(2, R)$中的共轭矩阵，此处$SL(2, R)$是$SL(2, C)$中实矩阵的集合。

2. 证明 $A \mapsto \det(A)$是$GL(2, C)$到非零复数乘法群的同态，并指出它的核。

3. 与群的每个元素都可交换的那些元素的集合称为群的中核。试证明$GL(2, C)$和$SL(2, C)$的中核分别为

$$H = \{ tI : t \neq 0 \}, \quad K = \{ I, -I \}$$

并证明群$GL(2, C)/H$与$SL(2, C)/K$同构。

4. 求出$GL(2, R)$和$SL(2, R)$的中核H_1和K_1。试问：$GL(2, R)/H_1$与$SL(2, R)/K_1$同构吗？

§ 2.2 度量结构

(2.1.1) 式所示的矩阵A的迹$\operatorname{tr}(A)$定义为

$$\operatorname{tr}(A) = a + d$$

简单计算表明

$$\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$$

从而有

$$\operatorname{tr}(BAB^{-1}) = \operatorname{tr}(AB^{-1}B) = \operatorname{tr}(A)$$

因此，**迹是共轭变换下的不变量**。此外，显然有

$$\mathrm{tr}(\lambda A)=\lambda\,\mathrm{tr}(A) \qquad (\lambda\in C)$$

$$\mathrm{tr}(A')=\mathrm{tr}(A)$$

迹函数还以一种重要的方式作用于矩阵对。首先，我们回忆一下，2×2矩阵类是复数域上的向量空间，A的Hermite转置A^*定义为

$$A^*=(\overline{A})'=\begin{pmatrix}\overline{a} & \overline{c}\\ \overline{b} & \overline{d}\end{pmatrix} \tag{2.2.1}$$

给定任何两个矩阵

$$A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$$

定义(A,B)为

$$(A,\ B)=\mathrm{tr}(AB^*)$$
$$=a\overline{\alpha}+b\overline{\beta}+c\overline{\gamma}+d\overline{\delta}$$

这是由所有2×2矩阵作成的向量空间上的数积，因为显然有

(i) $(A,A)\geqslant 0$，当且仅当$A=0$时等号成立；

(ii) $(\lambda_1A_1+\lambda_2A_2,B)=\lambda_1(A_1,B)+\lambda_2(A_2,B)$

(iii) $(B,A)=\overline{(A,B)}$

任何一种数积，比如说(x,y)，可诱导出一种范数$(x,\ x)^{1/2}$和度量$(x-y,\ x-y)^{1/2}$。在我们所讨论的情形中，显然，范数$\|A\|$为

$$\|A\|=(A,\ A)^{1/2}$$
$$=(|a|^2+|b|^2+|c|^2+|d|^2)^{1/2}$$

为完整起见，我将证明它满足作为范数的那些性质，即

(iv)　$\| A \| \geqslant 0$，当且仅当$A=0$时等号成立；

(v)　$\| \lambda A \| = |\lambda| \cdot \| A \| \qquad (\lambda \in C)$

(vi)　$\| A+B \| \leqslant \| A \| + \| B \|$

其中，(iv)和(v)是明显的，对(vi)将作一简短的证明。

此外，还有几个附带的关系式

(vii)　$|\det(A)| \cdot \| A^{-1} \| = \| A \|$

(viii)　$|(A, B)| \leqslant \| A \| \cdot \| B \|$

(ix)　$\| AB \| \leqslant \| A \| \cdot \| B \|$

(x)　$2|\det(A)| \leqslant \| A \|^2$

在这些关系式中，(vii)可直接得到。为了证明(viii)，可令

$$C = \lambda A - \mu B$$

其中$\lambda = (B, A)$，$\mu = \| A \|^2$。由性质(iv)有$\| C \|^2 \geqslant 0$，这就推出(viii)。

由于

$$\| A+B \|^2 = \| A \|^2 + (A, B) + (B, A) + \| B \|^2$$

性质(vi)可直接从(viii)和(iii)得到。

为证明(ix)，只需注意到若令

$$AB = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$$

则有

$$\begin{aligned} |p|^2 &= |a\alpha + b\gamma|^2 \\ &\leqslant (|a|^2 + |b|^2)(|\alpha|^2 + |\gamma|^2) \end{aligned}$$

（最后一行系由*Cauchy-Schwarz* 不等式得到）。对q，r和s也有类似的不等式，从而推出（ix）。

最后，（x）成立是由于

$$\begin{aligned}\|A\|^2-2|\det(A)| &\geqslant |a|^2+|b|^2+|c|^2+|d|^2\\&\quad-2(|ad|+|bc|)\\&=(|a|-|d|)^2+(|b|-|c|)^2\\&\geqslant 0\end{aligned}$$

其次，范数$\|A\|$诱导出度量$\|A-B\|$。因为

$$\|A-B\|=0 \text{当且仅当} A=B$$

$$\|B-A\|=\|(-1)(A-B)\|=\|B-A\|$$

$$\begin{aligned}\|A-B\|&=\|(A-C)+(C-B)\|\\&\leqslant\|A-C\|+\|C-B\|\end{aligned}$$

这个度量的显式表达式为

$$\|A-B\|=[|a-\alpha|^2+|b-\beta|^2+|c-\gamma|^2+|d-\delta|^2]^{\frac{1}{2}}$$

由此看出依度量

$$\begin{pmatrix}a_n & b_n\\ c_n & d_n\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$$

当且仅当$a_n\to a$，$b_n\to b$，$c_n\to c$，$d_n\to d$，这是所有2×2矩阵作成的向量空间上的一个度量。

范数，行列式以及迹函数显然都是连续函数。在$GL(2,C)$上，映射$A\mapsto A^{-1}$也是连续的；并且当$A_n\to A$，$B_n\to B$时有$A_nB_n\to AB$。这表明$GL(2,C)$是一个拓扑群。

习题 2.2

1．试证明：若A和B属于$SL(2,C)$，则

(i) $\operatorname{tr}(AB)+\operatorname{tr}(A^{-1}B)=\operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B)$

(ii) $\operatorname{tr}(BAB)+\operatorname{tr}(A)=\operatorname{tr}(B)\operatorname{tr}(AB)$

(iii) $\operatorname{tr}^2(A)+\operatorname{tr}^2(B)+\operatorname{tr}^2(AB)$

$$=\operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B)\operatorname{tr}(AB)+2+\operatorname{tr}(ABA^{-1}B^{-1})$$

在（i）中以A^nB代替B而知$\operatorname{tr}(A^nB)$是$\operatorname{tr}(A)$，$\operatorname{tr}(B)$，$\operatorname{tr}(AB)$和n的函数。

2． 给出$GL(2,C)$中两个子群G_1和G_2，以及G_1到G_2的映射f，使得f是同构对应但不是同胚对应。

3． 设V是由所有2×2复矩阵组成并且以$\|A-B\|$为度量的度量空间。求证：作为V的子集，

(i) $GL(2,C)$是开集而不是闭集；

(ii) $SL(2,C)$是闭集而不是开集；

(iii) $GL(2,R)$是非连通集；

(iv) $GL(2,C)$是连通集；

(v) $\{A: \operatorname{tr}(A)=1\}$是闭集但不是紧集；

〔对于（iv），可先证$GL(2,C)$的每个矩阵共轭于一个上三角矩阵T，然后证明可用$GL(2,C)$中的曲线连结T和I。〕

4．对于$n\times n$复矩阵$A=(a_{ij})$，定义

$$\operatorname{tr}(A)=a_{11}+\cdots+a_{nn}$$

求证：

$$\operatorname{tr}(BAB^{-1})=\operatorname{tr}(A)$$

并证明$\operatorname{tr}(AB^*)$是由所有这种矩阵组成的空间的一个度量。

§ 2.3 离散群

本节限于研究拓扑群$GL(2,C)$的子群。当且仅当在G上的子空间拓扑是离散拓扑时，我们说$GL(2,C)$的一个子

群G是离散的。这推出：若G是离散子群，X，A_1，A_2，…属于G，并且$A_n \to X$，则对于所有充分大的n有$A_n = X$。此处$X \in G$的假设并非必要，只需假定$X \in GL(2,C)$即可。事实上，此时有

$$A_n(A_{n+1})^{-1} \to XX^{-1} = I$$

因而对几乎一切n有$A_n = A_{n+1}$，于是有$A_n = X$。

为了证明G是离散群，只需证明G的一个点是孤立的。例如，只需证明

$$\inf\{\|X - I\| : X \in G,\ X \neq I\} > 0$$

即可，上式意味着$\{I\}$是G的开集（推论1.5.2）。用序列来叙述，G是离散群当且仅当$A_n \to I$与$A_n \in G$即意味着对几乎一切n有$A_n = I$。

我们将主要研究$SL(2, C)$，此时可直接用范数来刻画离散性：**当且仅当对每个正数k，集合**

$$\{A \in G : \|A\| \leqslant k\} \tag{2.3.1}$$

是有限集时，$SL(2,C)$的子群G**离散**。如果对每个k这种集合都是有限集，则因范数是连续函数，G显然不可能有极限点，因而G离散。反之，如果有一个这样的集合是无限集，则存在G中互不相同的元素A_n满足$\|A_n\| \leqslant k$，$n = 1, 2, \cdots$。设A_n的四个数为a_n，b_n，c_n和d_n，则有$|a_n| \leqslant k$，从而序列a_n存在收敛子列；其它三个数列也同样存在收敛子列。由熟知的对角线过程知存在A_n的一个子列使得相应的四个数列都收敛。不妨将该子列仍记为A_n，则有$A_n \to B$，B是某个矩阵；而由det是连续函数知$B \in SL(2,C)$。因此G不是离散的。

判别准则（2.3.1）表明：$SL(2,C)$**的离散子群**G**是可数集**。事实上，

$$G=\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n$$

其中G_n是G中满足$\|A\|\leqslant n$的元素A组成的有限集。显然，离散群的子群也是离散群，此外，若G是离散群，它的任何共轭群BGB^{-1}也是离散群；因为$X\mapsto BXB^{-1}$是$GL(2,\ \mathbf{C})$到自身的同胚。

关于离散性还有其它更有趣的结果以及种种判别准则，但这些内容最好联系Möbius变换加以讨论（这将在后面几章中进行）。在文献〔11〕中可以看到关于离散性的一种较强的描述。在结束本节之前，我们来介绍一个重要的例子。

例2.3.1 所谓模群是$SL(2,\mathbf{R})$的一个子群，它由a,b,c,d都是整数的那些矩阵A所组成。这个群显然是离散的。更宽泛些，由$SL(2,\mathbf{C})$中a,b,c,d都是Gauss整数的矩阵A所组成的所谓Picard群也是离散群（所谓Gauss整数即$m+in$，其中m，n是整数）。

习题 2.3

1．求证：$\{2^nI:\ n\in Z\}$是$GL(2,C)$的离散子群。并证明这时的集合(2.3.1)是无限集。

2．找出$GL(2,C)$中所有只含对角矩阵的离散子群。

3．证明$GL(2,C)$的每个离散子群都是可数集。

4．假设$GL(2,R)$的子群G包含一个有限指数的离散子群。试证明G也是离散子群。

§ 2.4 四元数

形如

$$q=\begin{pmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{pmatrix} \tag{2.4.1}$$

的2×2复矩阵称为四元数。以H表示四元数的集合。四元 数的加法和乘法即为矩阵的加法和乘法，并且容易验证下列事实：

（i） H关于加法是$Abel$群；

（ii） 非零四元数集合关于乘法是不可换群；

（iii） H是一个四维实向量空间，以

$$\mathbf{1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \qquad \mathbf{i}=\begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{j}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}, \qquad \mathbf{k}=\begin{pmatrix}0 & i\\ i & 0\end{pmatrix}$$

为基。

由于矩阵乘法满足分配律，四元数乘法由四个元 素$\mathbf{1},\mathbf{i}$，$\mathbf{j}$，$\mathbf{k}$的乘积所确定。事实上，这些元素生成一个8阶乘法 群‘并且

$$\mathbf{i}^2=\mathbf{j}^2=\mathbf{k}^2=-\mathbf{1}$$

$$\mathbf{ij}=\mathbf{k},\ \mathbf{jk}=\mathbf{i},\ \mathbf{ki}=\mathbf{j}$$

$$\mathbf{ji}=-\mathbf{k},\ \mathbf{kj}=-\mathbf{i},\ \mathbf{ik}=-\mathbf{j}$$

四元数集合中 包含C的一个“拷贝”，因为C到H的映射

$$x+\mathrm{i}y\longmapsto x\mathbf{1}+y\mathbf{i}$$

显然对加法和乘法关系保持不变。

回到（2.4.1）式，命$x+\mathrm{i}y=z$，$u+\mathrm{i}v=w$，则有

$$q=(x\mathbf{1}+y\mathbf{i})+(u\mathbf{j}+v\mathbf{k})$$

$$= (x1 + yi) + (u1 + vi)j \qquad (2.4.2)$$

由此，为了方便起见不如变更我们的记号而将（2.4.2）改写为

$$q = z + wj$$

并且对于这种表示式我们约定乘法规则为

$$(z_1 + w_1 j)(z_2 + w_2 j) = (z_1 z_2 - w_1 \overline{w_2}) + (z_1 w_2 + w_1 \overline{z_2})j$$

特别，若z和w属于C，则有

$$jz = \overline{z}j$$

$$(z + wj)(\overline{z} - wj) = |z|^2 + |w|^2$$

最后一个恒等式给出了乘法逆元素的公式，即

$$(z + wj)^{-1} = (\overline{z} - wj)/(|z|^2 + |w|^2)$$

此处当然有

$$\det(z + wj) = |z|^2 + |w|^2$$

习题 2.4

1. 试证明：非零四元数组成一个乘法群，它的中核为$\{tI: t$是非零实数$\}$。

2. 证明$SL(2, C)$不是紧集，但集合

$$\{q \in H: \det(q) = 1\}$$

是紧集。

3. 设S是形如$z + tj$的四元数集合，其中t是实数。试证明S在映射$q \mapsto jqj^{-1}$下不变。并通过将$z + tj$与R^3中的点(x, y, t)等同，试作出该映射的几何解释。

4. 同题3所设。试证明映射$q \mapsto kqk^{-1}$也使S保持不变，并作出此映射的几何解释。

§ 2.5 酉矩阵

说矩阵A是**酉矩阵**当且仅当

$$AA^* = 1$$

其中A^*由（2.2.1）式给定。任何酉矩阵A均满足

$$1 = \det(A)\det(A^*) = |\det(A)|^2$$

我们将着重研究行列式为1的酉矩阵类$SU(2,\mathbf{C})$。

定理2.5.1 设A属于$SL(2,\mathbf{C})$。则下列命题等价（它们刻画了$SU(2,\mathbf{C})$中元素的本质特征）：

（i）A是酉矩阵

(ii) $||A||^2 = 2$

(iii) A是四元数。

特别有

$$SU(2,\mathbf{C}) = SL(2,\mathbf{C}) \cap \mathbf{H}$$

［证］ 假定

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad ad - bc = 1$$

则

$$AA^* = \begin{pmatrix} |a|^2 + |b|^2 & a\bar{c} + b\bar{d} \\ \bar{a}c + \bar{b}d & |c|^2 + |d|^2 \end{pmatrix} \tag{2.5.1}$$

并且

$$|a - \bar{d}|^2 + |b + \bar{c}|^2 = ||A||^2 - 2 \tag{2.5.2}$$

首先，(2.5.1) 式表明若A是酉矩阵则$||A||^2 = 2$。其次，若$||A||^2 = 2$则从(2.5.2)式推出$a = \bar{d}$，$b = -\bar{c}$，因而A是四元数。最后，若A是四元数，则$a = \bar{d}$，$b = -\bar{c}$，又因

$ad-bc=1$，即从（2.5.1）式推出A是酉矩阵。

简单计算表明，SU（2，C）中每个矩阵A保持二次型$|z|^2+|w|^2$不变；说得明白些，若

$$(z,w)A=(z',w')$$

则

$$|z'|^2+|w'|^2=|z|^2+|w|^2$$

类似结果对列向量也成立，从而对任何矩阵X有

$$\|AX\|=\|XA\|=\|X\|$$

而此式表明

$$\|AXA^{-1}-AYA^{-1}\|=\|A(X-Y)A^{-1}\|=\|X-Y\|$$

因此，我们有如下结果：

定理2.5.2 假定A属于$SU(2,C)$。则映射$X\mapsto AXA^{-1}$是矩阵空间到自身的等距映射。

注：定理2.5.1和2.5.2以后还要以几何形式再次出现。

习题 2.5

1．试证明$SU(2,C)$是紧集，并证明它的任何离散子群都是有限集。

2．$SU(2,C)$是连通集吗？

3．以$SO(2)$表示$SL(2,R)$中实正交矩阵$A(AA'=I)$组成的群。试证明存在$SO(2)$到复平面中单位圆周的映射，它既是同构又是同胚。

4．试证明$SU(2,C)$中每个矩阵均可表示成如下形式：

$$\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} e^{i\psi} & 0 \\ 0 & e^{-i\psi} \end{pmatrix}$$

其中θ，ϕ，ψ是实数。

第三章 $\mathbf{R}^n$上的Möbius变换

§3.1 $\mathbf{R}^n$上的Möbius群

给定$\boldsymbol{R}^n$中一个球面

$$S(a,r)=\{x\in\boldsymbol{R}^n:|x-a|=r\}$$

其中$a\in\boldsymbol{R}^n$，$r>0$。关于$S(a,r)$的反射（或反演）ϕ定义为

$$\phi(x)=a+\left(\frac{r}{|x-a|}\right)^2(x-a) \qquad (3.1.1)$$

对于$S(0,1)(=S^{n-1})$，上式化为

$$\phi(x)=x/|x|^2$$

为了方便把它记为$x\mapsto x^*$，此处$x^*=x/|x|^2$。于是，一般的反射（3.1.1）可表示为

$$\phi(x)=a+r^2(x-a)^*$$

关于$S(a,r)$的反射在$x=a$处无定义，这可通过给$\boldsymbol{R}^n$增添一个附加点来加以解决。选取不属于$\boldsymbol{R}^n$（对任何n）的任意一点记作∞，并作并集

$$\hat{\boldsymbol{R}}^n=\boldsymbol{R}^n\cup\{\infty\}$$

由于当$x\to a$时$|\phi(x)|\to\infty$，我们就很自然地定义$\phi(a)=\infty$，并定义$\phi(\infty)=a$。于是，反射ϕ作用于$\hat{\boldsymbol{R}}^n$上，并且容易验证对$\hat{\boldsymbol{R}}^n$中所有的点x都有$\phi^2(x)=x$。显然，ϕ是$\hat{\boldsymbol{R}}^n$到自身的一一映射，当且仅当$x\in S(a,r)$时$\phi(x)=x$。

我们称如下形式的集合

$$P(a,t)=\{x\in \mathbf{R}^n:(x,a)=t\}\cup\{\infty\}$$

为$\hat{\mathbf{R}}^n$中的一个平面，其中$a\in\mathbf{R}^n$并且$a\neq 0$，(x,a)是通常的内积$\Sigma x_j a_j$，t是实数。由定义知∞属于每一个平面。关于$P(a,t)$（有时也说成关于$(x,a)=t$）的反射ϕ如通常所定义，即

$$\phi(x)=x+\lambda a$$

其中实参数λ的选取要使得$(x+\phi(x))/2$在$P(a,t)$上。由此得出ϕ的确切公式为

$$\phi(x)=x-2[(x,a)-t]a^* \qquad (3.1.2)$$

式中$x\in\mathbf{R}^n$，且有$\phi(\infty)=\infty$。ϕ同样是作用在$\hat{\mathbf{R}}^n$上的，对$\hat{\mathbf{R}}^n$中所有的x都有$\phi^2(x)=x$，因而ϕ是$\hat{\mathbf{R}}^n$到自身的一一映射。当且仅当$x\in P(a,t)$时$\phi(x)=x$。

显然，任何一个反射ϕ（不论是关于球面或是关于平面）在$\hat{\mathbf{R}}^n$上除∞和$\phi^{-1}(\infty)$两点外都是连续的，在那两点处的连续性尚未定义。为此我们来构造$\hat{\mathbf{R}}^n$上的一个度量，并证明关于这个度量，ϕ在整个$\hat{\mathbf{R}}^n$上连续。

首先，通过让点$(x_1,\cdots,x_n)$与点$(x_1,\cdots,x_n,0)$对应的自然方式把$\hat{\mathbf{R}}^n$嵌入$\hat{\mathbf{R}}^{n+1}$上。更明确地说，我们定义了一个映射$x\mapsto\tilde{x}$，其中

$$\tilde{x}=(x_1,\cdots,x_n,0),\quad x=(x_1,\cdots,x_n)$$

当然还有$\tilde{\infty}=\infty$。因此，$x\to\tilde{x}$是$\hat{\mathbf{R}}^n$到$\hat{\mathbf{R}}^{n+1}$中平面$x_{n+1}=0$的一一映射。而$\hat{\mathbf{R}}^{n+1}$中平面$x_{n+1}=0$又可一一映射成球面

$$S^n=\{y\in\mathbf{R}^{n+1}:|y|=1\}$$

这可通过让点$\tilde{x}$向着（或背着）e_{n+1}作投影，直至它遇到球面上异于e_{n+1}的那个唯一确定的点$\pi(\tilde{x})$作为其对应点。这一映射π就是熟知的从$\hat{\mathbf{R}}^n$到S^n的球极平面投影。

容易求出π的解析表达式。给定R^n中的点x，有

$$\pi(\tilde{x}) = \tilde{x} + t(e_{n+1} - \tilde{x})$$

其中t的选择要使得$|\pi(\tilde{x})| = 1$。条件$|\pi(\tilde{x})|^2 = 1$引出t的一个二次方程，这个方程有两个解，即$t = 1$和

$$t = \frac{|x|^2 - 1}{|x|^2 + 1}$$

（因为$|\tilde{x}| = |x|$）从而有

$$\pi(\tilde{x}) = \left(\frac{2x_1}{|x|^2 + 1}, \cdots, \frac{2x_n}{|x|^2 + 1}, \frac{|x|^2 - 1}{|x|^2 + 1} \right),$$

$$x \in R^n$$

及定义$\pi(\infty) = e_{n+1}$。

由于$x \mapsto \pi(\tilde{x})$是$\hat{R}^n$到S^n的一一映射，故可从S^n上的欧氏度量诱导出$\hat{R}^n$上的度量d，称其为$\hat{R}^n$上的**通弦度量**，其定义如下：

$$d(x, y) = |\pi(\tilde{x}) - \pi(\tilde{y})|, \quad x, y \in \hat{R}^n$$

经冗长而初等的计算，可导出d的显式公式，即

$$d(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2|x - y|}{(1 + |x|^2)^{\frac{1}{2}}(1 + |y|^2)^{\frac{1}{2}}}, & x, y \neq \infty \\ \dfrac{2}{(1 + |x|^2)^{\frac{1}{2}}}, & y = \infty \end{cases} \qquad (3.1.3)$$

在3.4节中，我们将给出此式的一个简短证明。

上述公式表明，限制在R^n上的度量d所诱导的拓扑与欧氏度量所诱导的拓扑相同；因此，从R^n的某个子集到R^n的任一函数关于这两种度量要么都连续，要么都不连续。容易看出，关于度量d，每个反射ϕ都是$\hat{R}^n$到自身的同胚。事实

上，因$\phi=\phi^{-1}$，我们只需证明ϕ在$\hat{R}^n$的每一点x处连续。对异于∞和$\phi(\infty)$的x，连续性是熟知的。问题归结为研究ϕ在∞和$\phi(\infty)(=\phi^{-1}(\infty))$两点处的连续性。若$\phi$是关于$S(a,r)$的反射，则当$x\to a$时有

$$d(\phi(x),\phi(a))=d(\phi(x),\infty)$$
$$=\frac{2}{(1+|\phi(x)|^2)^{\frac{1}{2}}}$$
$$\to 0$$

因而ϕ在$x=a$连续；类似可证ϕ在$x=\infty$也连续，若ψ是关于平面$P(a,t)$的反射，容易看出当$|x|\to+\infty$时有

$$|\psi(x)|^2=|x|^2+0(|x|)$$

即$|\psi(x)|\to+\infty$。这表明ψ在∞处连续，因而ψ也是$\hat{R}^n$到自身的同胚。

定义3.1.1 作用在$\hat{R}^n$上的*Möbius*变换定义为有限个（关于球面或平面的）反射的复合。

显然，每个*Möbius*变换都是$\hat{R}^n$的自同胚。两个*Möbius*变换的复合是*Möbius*变换。*Möbius*变换的逆变换也是*Möbius*变换，因若$\phi=\phi_1\cdots\phi_m$（此处ϕ_j是反射），则有$\phi^{-1}=\phi_m\cdots\phi_1$。此外，由于对任何反射中都有$\phi^2(x)=x$，因而恒等映射也是*Möbius*变换。

定义3.1.2 作用在$\hat{R}^n$上的*Möbius*变换群称为一般*Möbius*群，并记之为$GM(\hat{R}^n)$。

现在来考察*Möbius*变换的一些例子。首先，平移$x\mapsto x+a$，$a\in R^n$，是一个*Möbius*变换，因为它是关于$(x,a)=0$的反射与关于$(x,a)=|a|^2/2$的反射的复合。其次，伸缩$x\mapsto kx$，$k>0$，也是一个*Möbius*变换，因为它是关于

$S(0,1)$ 的反射与关于$S(0,\sqrt{k})$ 的反射的复合。

若以ϕ和ϕ^*分别表示关于S (a,r) 和S (0, 1)的反射，且$\psi(x)=rx+a$，则有

$$\phi=\psi\phi^*\psi^{-1} \tag{3.1.4}$$

由于ψ是$Möbius$变换，因此任何两个球面的反射都是群$GM(\hat{R}^n)$中的共轭元素。

作为$Möbius$变换的例子，还可以举出所有欧几里德等距映射。顺便指出，R^n 到自身的每个等距映射 ϕ，均可看成是作用在 $\hat{R}^n$上，且有$\phi(\infty)=\infty$的$Möbius$映射。

定理3.1.3 R^n的每个欧氏等距映射至多是$n+1$个关于平面的反射的复合。每个欧氏等距映射都是$Möbius$变换。

［证］ 因为每个平面反射都是等距映射，从而只要考虑满足$\phi(0)=0$的那些等距映射ϕ就足够了。这种等距映射保持向量的长度不变，因为

$$|\phi(x)|=|\phi(x)-\phi(0)|=|x-0|=|x|$$

它也保持内积不变，因为

$$\begin{aligned}2(\phi(x),\phi(y))&=|\phi(x)|^2+|\phi(y)|^2-|\phi(x)-\phi(y)|^2\\&=|x|^2+|y|^2-|x-y|^2\\&=2(x,y)\end{aligned}$$

这就推出向量$\phi(e_1)$, …, $\phi(e_n)$互相正交，因而是线性无关的。这n个向量组成n维向量空间R^n的一个基底，于是对于R^n中每个x，存在R^n中某个μ满足

$$\phi(x)=\sum_{j=1}^{n}\mu_j\phi(e_j)$$

因$\phi(e_j)$ 互相正交，而有

$$\mu_j=(\phi(x),\phi(e_j))$$

$$= (x, e_j)$$
$$= x_j$$

从而

$$\phi(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j \phi(e_j)$$

这表明ϕ是 R^n到自身的线性变换。由于任何等距映射都是一一映射，ϕ的核心是零维的，因而$\phi(R^n) = R^n$。

若A是ϕ关于基 e_1，…，e_n 的矩阵，则 $\phi(x) = xA$，且A的行向量为$\phi(e_1)$，…，$\phi(e_n)$。这表明矩阵 AA' 的第(i, j)个元素为$(\phi(e_i), \phi(e_j))$即(e_i, e_j)，当$i = j$时其值为1，否则为0。因而A是正交矩阵。

现在来证明ϕ至多是n个平面反射的复合。首先，置

$$a_1 = \phi(e_1) - e_1$$

若$a_1 \neq 0$，则令ψ_1是关于平面 $P(a_1, 0)$的反射。利用(3.1.2)式作直接计算，所得结果表明，ψ_1 把 $\phi(e_1)$ 映射成 e_1。若$a_1 = 0$，则令ψ_1是恒等映射。于是，在任何情况下ψ_1都把 $\phi(e_1)$映射成e_1。置$\phi_1 = \psi_1\phi$，则ϕ_1是保持0和e_1不变的等距映射。

一般地，设ϕ_k是保持0，e_1，…，e_k诸向量不变的等距映射，并置

$$a_{k+1} = \phi_k(e_{k+1}) - e_{k+1}$$

令ψ_{k+1}是恒等映射（当$a_{k+1} = 0$）或关于$P(a_{k+1}, 0)$的反射（当$a_{k+1} \neq 0$），如前所述，$\psi_{k+1}\phi_k$使0和e_{k+1}保持不变。加上对于$1 \leqslant j \leqslant k$有

$$(e_j, a_{k+1}) = (e_j, \phi_k(e_{k+1})) - (e_j, e_{k+1})$$
$$= (\phi_k(e_j), \phi_k(e_{k+1})) - 0$$
$$= (e_j, e_{k+1}) = 0$$

故由（3.1.2）式有

$$\psi_{k+1}(e_j)=e_j$$

因ϕ_k使0，e_1，…，e_k诸向量保持不变，从而推出$\psi_{k+1}\phi_k$使0，e_1,…,e_{k+1}诸向量保持不变。总之，存在ψ_j（恒等映射或平面反射），使等距映射$\psi_n\psi_{n-1}\cdots\psi_1\phi$保持0，$e_1$，…，$e_n$诸向量不变。如前所述，这样的映射必是线性变换，因而是恒等映射；于是有$\phi=\psi_1\cdots\psi_n$。因为任何等距映射复合上适当的反射就具有ϕ的形式，这就完成了定理3.1.3的证明。□

还有另外一种有用的表示式。

定理3.1.4 函数ϕ为欧氏等距映射当且仅当它具有如下形式

$$\phi(x)=xA+x_0$$

其中A是正交矩阵，$x_0\in\boldsymbol{R}^n$。

［证］ 因正交矩阵保持向量的长度不变，故具有给定形式的任何一个映射ϕ显然是等距的。反之，若ϕ是等距映射，则$\phi(x)-\phi(0)$是保持原点不变的等距映射，因而可由正交矩阵给出（如定理3.1.3的证明中所曾经讨论的）。□

还可以获得关于等距映射的更详尽的信息，例如，我们有如下结果：

定理3.1.5 给定任一实正交矩阵A，必存在实正交矩阵Q，使得

$$QAQ^{-1}=\begin{pmatrix} A_1 & & & & 0\\ & \ddots & & & \\ & & A_r & & \\ & & & I_s & \\ 0 & & & & -I_t\end{pmatrix}$$

其中r，s，t是非负整数，并且

$$A_k = \begin{pmatrix} \cos\theta_k & -\sin\theta_k \\ \sin\theta_k & \cos\theta_k \end{pmatrix}$$

因此，通过适当选取正交基，保持原点不变的任何欧氏等距映射均可用这种形式的矩阵表示。这也清楚地展示了等距映射所有可能的类型。

现在回过头来讨论一般的反射ϕ。ϕ似乎应当是反转定向映射，我们来证明确实如此。

定理3.1.6 每个反射都是反转定向映射并且共形。

[证] 设ϕ是关于$P(a,t)$的反射。从（3.1.2）式可直接推出ϕ是可微的，且$\phi^{(1)}(x)$是常数对称矩阵(ϕ_{ij})，其中

$$\phi_{ij} = \delta_{ij} - \frac{2a_i a_j}{|a|^2}$$

（δ_{ij}是$Kronecker$记号，当$i=j$时为1，否则为0）。把它写成如下更为方便的形式。

$$\phi'(x) = I - 2Q_a$$

其中Q_a的元素是$a_i a_j/|a|^2$。Q_a是对称矩阵，且有$Q_a^2 = Q_a$，因此

$$\phi'(x)\phi'(x) = (I-2Q_a)^2 = I$$

这表明$\phi'(x)$是一个正交矩阵，从而证实了ϕ的共形性。

令$D=\det\phi'(x)$。因$\phi'(x)$是正交矩阵，$D\neq 0$（事实上$D=\pm 1$）。而且D是$R^n-\{0\}$中向量a的连续函数，因而是$R^n-\{0\}$到$R^1-\{0\}$内的连续映射。由于$R^n-\{0\}$连通（此处假定$n\geqslant 2$），故对于一切非零向量a，D的值要么都是正数要么都是负数。取$a=e_1$时，ϕ的表达式为这时的

$$\phi(x_1, \cdots, x_n) = (-x_1 + 2t, x_2, \cdots, x_n)$$

$D = -1$。因此可以断定，对所有非零向量a均有$D<0$，故每个平面反射都是反转定向映射。

类似的论证过程对关于球面的反射也成立。先假定ϕ是关于$S(0,1)$的反射，则当$x \neq 0$时，$\phi'(x)$的一般元素为

$$\frac{\delta_{ij}}{|x|^2} - \frac{2x_i x_j}{|x|^4}$$

故

$$\phi'(x) = |x|^{-2}(I - 2Q_x)$$

这表明在每个非零点x处ϕ是共形的。

以$D(x)$表示$\det \phi'(x)$。因$\phi(\phi(x)) = x$，由链式法则有

$$D(\phi(x))D(x) = 1$$

故可仿照前面的讨论推出D在$R^n - \{0\}$上或恒取正值或恒取负值。取$x = e_1$经简单计算得到$D(e_1) = -1$，于是对于一切非零的x有$D(x) < 0$。

关于一般的球面反射的证明，β是（3.1.4）式的一个简单应用，此处不再作详细推导。 □

上述结论表明，偶数个反射的复合是保持定向映射（简称保向映射），奇数个反射的复合是反转定向映射（简称反向映射）。

定义3.1.7 作用在$\hat{R}^n$上的Möbius群$M(\hat{R}^n)$是$GM(\hat{R}^n)$的子群，它由$GM(\hat{R}^n)$中所有保向Möbius变换组成。

在结束本节之前，我们再给出一个简单而有用的公式。若σ是关于欧氏球面$S(a,r)$的反射，则

$$|\sigma(y)-\sigma(x)| = r^2|(y-a)^*-(x-a)^*|$$

$$= r^2\left(\frac{1}{|y-a|^2}-\frac{2(x-a,y-a)}{|x-a|^2|y-a|^2}+\frac{1}{|x-a|^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{r^2|y-x|}{|x-a|\,|y-a|} \qquad (3.1.5)$$

这表明

$$\lim_{h\to 0}\frac{|\sigma(x+h)-\sigma(x)|}{|h|} = \frac{r^2}{|x-a|^2}$$

它给出了σ在x处的局部伸缩值。

习题 3.1

1. 试证明：关于平面$(x, a)=0$和$(x, b)=0$的两个反射可交换的充要条件是向量a与b正交。

2. 求证：若ϕ是关于$(x, a)=t$的反射，则当$|x|\to+\infty$时有

$$|\phi(x)|^2=|x|^2+0(x)$$

3. 设ϕ是关于$S(a,r)$的反射，试给出下列结论的解析证明：

(i) $\phi(x)=x$ 当且仅当 $x\in S(a,r)$

(ii) $\phi^2(x)=x$

(iii) $|x-a|\cdot|\phi(x)-a|=r^2$

并对关于$P(a,t)$的反射作出同样的证明（(iii)要作些改变）。

4. 用解析方法和几何方法证明：对R^n中一切非零的x和y，有

$$|x|\cdot|y-x^*|=|y|\cdot|x-y^*|$$

5. 试证明，若以ϕ_t表示关于$S(ta, t|a|)$的反射，则

$$x \mapsto \phi(x) = \lim_{t \to +\infty} \phi_t(x)$$

表示关于平面$(x, a)=0$的反射。

6. 验证公式(3.1.3)。

7. 设π是$x_{n+1}=0$到S^n的球极平面射影。试证：若$y \in S^n$则

$$\pi^{-1}(y) = \frac{1}{(1-y_{n+1})}(y_1, \cdots, y_n, 0)$$

8. 证明C中的映射$z \to 1+\bar{z}$是三个反射（且不能少于此数）的复合。（因而定理3.1.3中的$n+1$是能够达到的。）

9. 以ϕ表示关于$S(e_{n+1}, \sqrt{2})$的反射。求证在平面$x_{n+1}=0$上$\phi=\pi$，并求出$\phi(H^{n+1})$。

10. 利用定理3.1.5和定义3.1.7证明：若n是奇数并且$\phi \in M(\hat{R}^n)$，则ϕ具有一根轴线(由不动点作成的直线)。

§ 3.2 Möbius变换的性质

我们将要证明，*Möbius*变换把每个球面和平面映射成球面或平面。由此，为了方便可将用语作些改变。今后，我们用“球面”来表示形如$S(a, r)$的一个球面或者一个平面。而把球面$S(a, r)$叫做欧氏球面或简单地称为$S(a, r)$形球面。

定理3.2.1 设ϕ是任一*Möbius*变换，Σ是任一球面。则$\phi(\Sigma)$也是一个球面。

[证] 容易看出，当ϕ是欧氏等距映射时$\phi(\Sigma)$是一个球面；特别当ϕ是关于平面的反射时结论成立。同样容易看出，当$\phi(x)=kx$，$k>0$时，$\phi(\Sigma)$是一个球面。

每个球面Σ是$\hat{R}^n$内满足某个如下形式的方程的那些x组

成的集，

$$\varepsilon|x|^2-2(x,a)+t=0$$

其中ε和t是实数，$a\in R^*$，并约定当且仅当$\varepsilon=0$时∞满足此方程。

若$x\in\Sigma$，记$y=x^*$，则有

$$\varepsilon-2(y,a)+t|y|^2=0$$

这是另一个球面Σ_1的方程。因此，若ϕ^*是映射$x\mapsto x^*$，则$\phi^*(\Sigma)\subset\Sigma_1$。同理有$\phi^*(\Sigma_1)\subset\Sigma$，于是$\phi^*(\Sigma)=\Sigma_1$。

由（3.1.4）式及前面的注记，当ϕ是关于任一欧氏球面的反射时，$\phi(\Sigma)$是一个球面。由于每个*Möbius*变换都是反射的复合，从而推出定理的结论。 □

对*Möbius*变换在几何性质上的深入研究，本质上都离不开定理3.2.1以及*Möbius*变换共形的事实。共形性的一个有用的替代物是两个球面Σ和Σ'的反积（Σ,Σ'）；这是一个出色的概念，它是仅与Σ和Σ'有关的一个实的显式表达式，并且在所有*Möbius*变换下不变。当Σ与Σ'相交时，它是交角的函数；当Σ与Σ'不相交时，它是两球面的双曲距离的函数（下面再作解释）。无疑，（Σ,Σ'）的不变性和直观的特色，使之成为一个强有力的出色的工具。

确定一个球面Σ（$S(a,r)$或$P(a,t)$）的方程是

$$|x|^2-2(x,a)+|a|^2-r^2=0$$

或

$$-2(x,a)+2t=0$$

这两类方程也可写成统一的形式

$$a_0|x|^2-2(x,a)+a_{n+1}=0$$

其中$a=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$。Σ的系数向量（$a_0,a_1,\cdots,a_n,$

a_{n+1})并不由Σ唯一确定，但确定到彼此只相差一个非零实数倍。而且若 $(a_0, \cdots, a_{n+1})$是Σ的任一系数向量，则

$$|a|^2 > a_0 a_{n+1}$$

定义3.2.2 设Σ和Σ'是分别具有系数向量 $(a_0, \cdots, a_{n+1})$ 和 $(b_0, \cdots, b_{n+1})$ 的球面。Σ和Σ'的**反积**(Σ, Σ')为

$$(\Sigma, \Sigma') = \frac{|2(a, b) - a_0 b_{n+1} - a_{n+1} b_0|}{2(|a|^2 - a_0 a_{n+1})^{\frac{1}{2}}(|b|^2 - b_0 b_{n+1})^{\frac{1}{2}}} \tag{3.2.1}$$

注意：这是由Σ和Σ'所唯一确定的量；分母中加括号的量是正的，我们取其正的平方根。如果定义在 $\boldsymbol{R}^{n+2}$上的双线性型q为

$$q(x, y) = 2(x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n) - (x_0 y_{n+1} + x_{n+1} y_0)$$

则可将反积更简洁地表为

$$(\Sigma, \Sigma') = \frac{|q(a', b')|}{|q(a', a')|^{\frac{1}{2}} |q(b', b')|^{\frac{1}{2}}}$$

其中$a' = (a_0, a_1, \cdots, a_n, a_{n+1})$，$b'$与之类似。

求出下列三种情况下 (Σ, Σ') 的显式表示式是有用的。

Ⅰ 若 $\Sigma = S(a, r)$，$\Sigma' = S(b, t)$，则

$$(\Sigma, \Sigma') = \frac{r^2 + t^2 - |a - b|^2}{2rt} \tag{3.2.2}$$

Ⅱ 若 $\Sigma = S(a, r)$，$\Sigma' = P(b, t)$，则

$$(\Sigma, \Sigma') = \frac{|(a, b) - t|}{r|b|} \tag{3.2.3}$$

Ⅲ 若 $\Sigma = P(a, r)$，$\Sigma' = P(b, t)$，则

$$(\Sigma, \Sigma') = \frac{|(a,b)|}{|a|\ |b|} \tag{3.2.4}$$

这些公式是容易验证的。注意：在上述每种情况中，若 Σ 与 Σ' 相交，则 $(\Sigma, \Sigma') = \cos\theta$，$\theta$是交角。特别，当且仅当$\Sigma$与$\Sigma'$正交时 $(\Sigma, \Sigma') = 0$。还可看出在情形Ⅱ时有

$$(\Sigma, \Sigma') = \frac{\delta}{r}$$

其中δ是$S(a,r)$的中心到平面$P(b,t)$的距离；因而当且仅当$a \in P(b,t)$时$(\Sigma, \Sigma') = 0$。

现在来证明(Σ, Σ')的不变性。

定理3.2.3 对任一Möbius变换ϕ与任意两个球面Σ和Σ'，均有

$$(\phi(\Sigma), \phi(\Sigma')) = (\Sigma, \Sigma')$$

［证］ 存在Möbius变换把球面Σ映射成球面Σ'，且由此可诱导出Σ和Σ'的系数向量（在相差一个数量倍数的范围内）之间的一个映射

$$(a_0, a_1 \cdots, a_n, a_{n+1}) \mapsto (a_0', a_1', \cdots, a_n', a_{n+1}')$$

例如，R^n上的正交变换$x \mapsto xA = y$（这概括了所有关于过原点的平面的反射）满足

$$|x|^2 = |y|^2, \quad (x,a) = (xA, aA) = (y, aA)$$

因而把球面

$$a_0|x|^2 - 2(x,a) + a_{n+1} = 0$$

映射成球面

$$a_0|y|^2 - 2(y, aA) + a_{n+1} = 0$$

于是它所诱导的系数间的映射为

$$a_0 \mapsto a_0, \quad a \mapsto aA, \quad a_{n+1} \mapsto a_{n+1}$$

显然，当两个系数向量都服从此变换时（3.2.1）不变。这就推出（Σ，Σ′）在映射$x\mapsto x.1$下不变。

类似地，映射（i）$x\mapsto kx$（$k>0$）；（ii）$x\mapsto x^*$；（iii）$x\mapsto x+u$诱导出映射：

(i) $(a_0,a_1,\cdots,a_n,a_{n-1})\mapsto(a_0,ka_1,\cdots,ka_n,k^2a_{n+1})$

(ii) $(a_0,a_1,\cdots,a_n,a_{n+1})\mapsto(a_{n+1},a_1,\cdots,a_n,a_0)$

(iii) $(a_0,a_1,\cdots,a_n,a_{n+1})\mapsto(a_0,a_1+a_0u_1,\cdots,$

$$a_n+a_nu_n,a_{n+1}+2(a,u)+a_0|u|^2)$$

容易验证，（3.2.1）在所有这些变换下均保持不变，且由于它们所对应的*Möbius*变换生成*Möbius*群，定理已完全得到证明。从代数上容易看出，一个*Möbius*变换诱导出关于系数向量的一个线性变换，这个线性变换的矩阵A保持二次型q不变。 □

下一个结果的证明指明了如何用反积替代共形性。

定理3.2.4　设Σ是任一球面，σ是关于Σ的反射，I是恒等映射。若ϕ是使Σ中每一点x保持固定不变的任一*Möbius*变换，则$\phi=I$或$\phi=\sigma$。

［证］　首先考虑Σ是$\hat{R}^n$中的平面$x_n=0$的情形。令$\Sigma'=S(a,r)$，其中$a\in\Sigma$，$r>0$。因$\infty\in\Sigma$，∞是ϕ的不动点；故ϕ把Σ'映射成一个欧氏球面，设为$\Sigma''=S(b,t)$。因$a\in\Sigma$而有$(\Sigma,\Sigma')=0$。由定理3.2.3所描述的不变性推出$(\Sigma,\Sigma'')=0$，故$b\in\Sigma$；于是$a_n=b_n=0$。$\Sigma\cap\Sigma'$的每一点是ϕ的不动点，因而当且仅当

$$(x_1-b_1)^2+\cdots+(x_{n-1}-b_{n-1})^2=t^2$$

时有

$$(x_1-a_1)^2+\cdots+(x_{n-1}-a_{n-1})^2=r^2$$

故可断定有$a=b$，$t=r$；于是ϕ把Σ'映为自身。

其次，我们选取任意一个不属于Σ的x，令$y=\phi(x)$。再在Σ中任意取定一点a，且令$r=|x-a|$，因而$x\in S(a,r)$。由于ϕ使$S(a,r)$不变，y属于$S(a,r)$，所以有

$$|x|^2-2(x,a)+|a|^2=|y|^2-2(y,a)+|a|^2$$

注意此式对Σ中所有的a都成立。取$a=0$时得到$|x|=|y|$。作为其推论对Σ中每一点a有

$$(x,a)=(y,a)$$

取a为e_1，…，e_{n-1}即得出$x_j=y_j$，$j=1$，2，…，$n-1$。由$|x|=|y|$而知有$y_n=\pm x_n$；于是$\phi(x)(=y)$或为x或$\sigma(x)$。又因ϕ保持Σ不变，并置换$\hat{R}^n-\Sigma$的分集，故

$$\phi=I \quad 或 \quad \phi=\sigma$$

现在可着手完成对一般情况的证明。首先，给定任一球面Σ，存在$M\ddot{o}bius$变换ψ把Σ映射成$x_n=0$；我们略去对这一点的详细推证过程。其次，设σ是关于Σ的反射，η是关于平面$x_n=0$的反射。变换$\psi\sigma\psi^{-1}$使平面$x_n=0$的每一点保持固定并且不是恒等映射；因而由证明的第一部份知有$\psi\sigma\psi^{-1}=\eta$。

若ϕ是使Σ中每点保持固定的任一$M\ddot{o}bius$变换，则$\psi\phi\psi^{-1}$或为I或为η；因而ϕ或为I或为σ。 □

这一证明过程还表明：任何反射σ都共轭于一个固定的反射η。于是我们得到（3.1.4）的如下推广

推论 任意两个反射是$GM(\hat{R}^n)$内的共轭元素。

定理3.2.4有一个用反演点表述的形式。以σ表示关于球面Σ的反射，则x和y是关于Σ的一对反演点的充要条件是$y=(\sigma x)$（当然还有$x=\sigma(y)$）。

现在假定x和y是关于Σ的一对反演点，设ϕ是任一$M\ddot{o}$-

*bius*变换，σ_1是关于球面$\phi(\Sigma)$的反射。按照定理3.2.4，有$\phi^{-1}\sigma_1\phi=\sigma$，或写成与之等价的形式$\sigma_1\phi=\phi\sigma$。这同如下说法是一致的，即"对所有的$x$，$\sigma_1$把$\phi(x)$映射成$\sigma(y)$"；因而$\phi(x)$与$\phi(y)$是关于$\phi(\Sigma)$的一对反演点。我们将此叙述成定理3.2.4的第二种形式。

定理3.2.5 设x和y是关于球面Σ的一对反演点，ϕ是任一Möbius变换。则$\phi(x)$和$\phi(y)$是关于球面$\phi(\Sigma)$的一对反演点。

定理3.2.6 当且仅当过x和y的每个球面与Σ正交时x和y是关于球面Σ的反演点。

〔证〕 当Σ是一个平面时结论显然是正确的；由于反演点和正交性都是不变量，因而结论对一般情形也是正确的。□

我们以对交比作一简要讨论来结束本节。给定$\boldsymbol{R}^n$内四个不同的点x，y，u，v，这四点的交比为

$$[x,y,u,v]=\frac{d(x,u)d(y,v)}{d(x,y)d(u,v)} \tag{3.2.5}$$

根据(3.1.3)(通弦距离d的表达式)有

$$[x,y,u,v]=\frac{|x-u|\cdot|y-v|}{|x-y|\cdot|u-v|} \tag{3.2.6}$$

当其中一个变元为∞时可作适当的解释（由(3.2.5)这是完全可以的）。

定理3.2.7 映射$\phi:\hat{\boldsymbol{R}}^n\to\hat{\boldsymbol{R}}^n$是Möbius变换的充要条件是它保持交比不变。

〔证〕 由于对欧氏距离只改变一个常数因子的那些Möbius变换不改变表达式(3.2.6)的值，故只需考虑映射

$x \mapsto x^*$。因（见（3.1.5））

$$|x^* - y^*| = \frac{|x-y|}{|x|\cdot|y|}$$

故交比也是映射$x \mapsto x^*$下的不变量。这就推出所有*Möbius*映射均保持交比不变。

现在假定ϕ: $\hat{R}^n \to \hat{R}^n$保持交比不变。通过ϕ与*Möbius*变换的复合，即知仅考虑$\phi(\infty)=\infty$的情形就足够了。在R^n内取四个不同的点x，y，u，v，由

$$[\infty, y, u, v]$$
$$[x, y, \infty, v]$$

在ϕ映射下不变可得

$$\frac{|\phi(x)-\phi(y)|}{|x-y|} = \frac{|\phi(u)-\phi(v)|}{|u-v|}$$

限制$\{x, y\}\cap\{u, v\}=\phi$并不是必要的（上式两端可同关于另外两点$a$，$b$的同样表达式相比较，这两点可取为与$x$，$y$，$u$，$v$都不相同的点）。上式表明$\phi$是相似变换，因而是*Möbius*变换。

习题 3.2

1．验证(3.2.2)，(3.2.3)和(3.2.4)。

2．补足定理3.2.3证明中未证的一些细节的证明。

3．设d是$\hat{R}^n$中的通弦度量。求证

$$d(x^*-y^*)=d(x, y)$$

§ 3.3 Poincaré扩张

*Poincaré*发现，作用在$\hat{R}^n$的每个*Möbius*变换ϕ可自然

扩张为作用在$\hat{R}^{n+1}$上的一个Möbius变换$\tilde{\phi}$，因此$GM(\hat{R}^n)$可视为$GM(\hat{R}^{n+1})$的子群。这种扩张依赖于$\hat{R}^n$到$\hat{R}^{n+1}$的嵌入

$$x \mapsto \tilde{x} = (x_1, \cdots, x_n, 0), \quad x = (x_1, \cdots, x_n)$$

对于作用在$\hat{R}^n$上的每个反射ϕ，我们以如下方式确定出一个作用在$\hat{R}^{n+1}$上的反射$\tilde{\phi}$：若ϕ是关于$S(a,r)$的反射，$a \in R^n$，则$\tilde{\varphi}$是关于$S(\tilde{a},r)$的反射；若ϕ是关于$P(a,t)$的反射，则$\tilde{\phi}$是关于$P(\tilde{a},t)$的反射。若$x \in R^n, y = \phi(x)$，则由（3.1.1）和（3.1.2）推出

$$\tilde{\phi}(x_1, \cdots, x_n, 0) = (y_1, \cdots, y_n, 0) = \widetilde{\phi(x)} \tag{3.3.1}$$

这就是所说$\tilde{\phi}$是ϕ的自然扩张的含义。由于我们可以使R^{n+1}和$R^n \times R^1$同化，（3.3.1）也可写成

$$\tilde{\phi}(x, 0) = (\phi(x), 0)$$

注：$\tilde{\phi}$使平面$x_{n+1} = 0$（即$\hat{R}^n$）和半空间$x_{n+1} > 0$，$x_{n+1} < 0$都保持不变；这些事实可直接从(3.1.1)和(3.1.2)推出。

因作用在$\hat{R}^n$上的每个Möbius变换ϕ是有限个反射ϕ_j的复合，比如$\phi = \phi_1 \cdots \phi_m$，因此至少存在一个Möbius变换$\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}_1 \cdots \tilde{\phi}_m$，它把$\phi$的作用范围按(3.3.1)的意义扩张到$\hat{R}^{n+1}$，并使

$$H^{n+1} = \{(x_1, \cdots, x_{n+1}) : x_{n+1} > 0\}$$

保持不变。

事实上，至多可存在一个扩张；因若ψ_1和ψ_2是两个这样的扩张，则$\psi_2^{-1}\psi_1$使平面$x_{n+1} = 0$的每一点都保持不变，并使H^{n+1}保持不变，故由定理3.2.4知$\psi_1 = \psi_2$。

定义3.3.1 $GM(\hat{\mathbf{R}}^n)$中的ϕ的Poincaré扩张是上述所确定的$GM(\hat{\mathbf{R}}^{n+1})$中的变换$\widetilde{\phi}$。

显然，若ϕ和ψ都属于$GM(\hat{\mathbf{R}}^n)$，比如设$\phi=\phi_1\cdots\phi_m$，$\psi=\psi_1\cdots\psi_k$，则$\phi\psi$的Poincaré扩张为

$$
\begin{aligned}
(\phi\psi)^{\sim} &= (\phi_1\cdots\phi_m\psi_1\cdots\psi_k)^{\sim} \\
&= \widetilde{\phi}_1\cdots\widetilde{\phi}_m\widetilde{\psi}_1\cdots\widetilde{\psi}_k \\
&= \widetilde{\phi}\,\widetilde{\psi}
\end{aligned}
$$

故映射$\phi\mapsto\widetilde{\phi}$是$GM(\hat{\mathbf{R}}^n)$到$GM(\hat{\mathbf{R}}^{n+1})$的一个内射同态；这一点是平凡的，但却是重要的。

我们现在集中研究Poincaré扩张在H^{n+1}中的作用。首先，若$\widetilde{\phi}$是关于球面$S(\widetilde{a},r)$的反射，$a\in\mathbf{R}^n$，则由（3.1.5）得到

$$
\frac{|\widetilde{\phi}(y)-\widetilde{\phi}(x)|}{|y-x|}=\frac{r^2}{|x-\widetilde{a}|\cdot|y-\widetilde{a}|}
$$

此时，以$[\widetilde{\phi}(x)]_j$表示$\widetilde{\phi}(x)$的第j个分量。因

$$
\widetilde{\phi}(x)=\widetilde{a}+r^2(x-\widetilde{a})^*
$$

故有

$$
[\widetilde{\phi}(x)]_{n+1}=0+\frac{r^2x_{n+1}}{|x-\widetilde{a}|^2} \tag{3.3.2}
$$

这表明值

$$
\frac{|y-x|^2}{y_{n+1}x_{n+1}} \tag{3.3.3}
$$

是关于$\widetilde{\phi}$的不变量。

关于平面$P(\widetilde{a},t)(a\in\mathbf{R}^n)$的反射$\widetilde{\phi}$是一个欧氏等距映射，且

$$[\widetilde{\phi}(x)]_{n+1}=x_{n+1}$$

因而（3.3.3）也是这一反射下的不变量。我们断定(3.3.3)是所有*Poincaré*扩张下的不变量。这种不变性的一个直接推论是：$GM(\hat{R}^n)$中的任一ϕ的*Poincaré*扩张是赋予*Riemann*度量ρ的空间H^{n+1}的一个等距映射，度量ρ由下式给定

$$ds=\frac{|dx|}{x_{n+1}}$$

这是双曲空间的第一个模型，ρ是H^{n+1}中的双曲度量。空间（H^{n+1}，ρ）的这一美妙的双曲几何结构作为研究GM（$\hat{R}^n$）的任一子群G的工具是十分有效的，因为我们可以作出G中每个ϕ的*Poincaré*扩张因而可把G作为H^{n+1}的一个等距映射子群来研究。

在第七章中我们将更仔细地研究平面H^2上的双曲几何，其中的一些结果（及证明）可以毫无困难地推广到H^{n+1}中去。一个这样的结果是：若$x=se_{n+1}$，$y=te_{n+1}$，则

$$\rho(x,y)=\left|\log\frac{s}{t}\right|$$

故

$$\cosh\rho(x,y)=1+\frac{|x-y|^2}{2x_{n+1}y_{n+1}} \qquad (3.3.4)$$

因（3.3.4）的两端是关于所有$\widetilde{\phi}$的不变量，从而看出它对H^{n+1}中所有的x和y也当然成立。

特别，具有双曲中心（y_1，…，y_{n+1}）和双曲半径r的双曲球面

$$\{x \in H^{n+1}: \rho(x, y) = r\}$$

正是一个欧氏球面

$$(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2 + (x_{n+1} - y_{n+1}\cosh r)^2$$
$$= (y_{n+1}\sinh r)^2 \qquad (3.3.5)$$

顺便提一下，给定H^{n+1}的两个不同的点，存在唯一的一条连接这两点的曲线γ，它使积分

$$\int_\gamma \frac{|dx|}{x_{n+1}}$$

达到最小值，这样的曲线是一段测地弧线，并且所有的测地线都是与R^n正交的欧氏半圆周，包括H^{n+1}中的欧氏竖直线。

习题 3.3

1. 求证：若x和y属于H^{n+1}，则

$$\sinh^2 \frac{1}{2}\rho(x, y) = \frac{|x - y|^2}{4x_{n+1}y_{n+1}}$$

2. 求证：若$x \in H^{n+1}$，则

$$\cosh \rho(x, |x| e_{n+1}) = \frac{|x|}{x_{n+1}}$$

并作出几何解释。

3. 设S是H^{n+1}中以y为双曲中心，以r为双曲半径的双曲球面。以$\bar{y}$表示y关于平面$x_{n+1} = 0$的反演点。求证：

$$S = \left\{x: \frac{|x - y|}{|x - \bar{y}|} = \tanh\left(\frac{1}{2}r\right)\right\}$$

4. 假定$\phi \in GM(\hat{R}^{n-1})$，并设$\phi$使$H^{n+1}$保持不变。试证明$\phi$是$GM(\hat{R}^n)$中某个$\phi$的Poincaré扩张。

§ 3.4 单位球的自映射

如已所见，$GM(\hat{\mathbf{R}}^n)$ 的元素可视为 H^{n+1} 的双曲等距映射，因而显然可作变换由之得出别的双曲空间模型。我们将把 H^{n+1} 映射成 B^{n+1}，从而得到 $GM(\hat{\mathbf{R}}^n)$ 的另一种(同构)映象，其每个元素使 B^{n+1} 保持不变。这一新模型更具有对称性，∞ 点不再起着特殊的作用。

设 ϕ_0 是关于 $S(e_{n+1},\sqrt{2})$ 的反射，即

$$\phi_0(x) = e_{n+1} + \frac{2(x - e_{n+1})}{|x - e_{n+1}|^2}$$

则当 $x \in \mathbf{R}^n$ 时有

$$\phi_0(\tilde{x}) = e_{n+1} + \frac{2(x_1, \cdots, x_n, -1)}{1 + |x|^2}$$

$$= \left(\frac{2x_1}{1 + |x|^2}, \cdots, \frac{2x_n}{1 + |x|^2}, \frac{|x|^2 - 1}{1 + |x|^2} \right)$$

而这正是 § 3.1 中已讨论过的从 $\hat{\mathbf{R}}^n$ 到 $\hat{\mathbf{R}}^{n+1}$ 中的 S^n 的球极平面射影 π 的公式。

球极平面射影以反射的形式出现，这引导出对通弦距离公式 (3.1.3) 的一个简单的证明。若 $x \in \mathbf{R}^n$，则

$$|\tilde{x} - e_{n+1}|^2 = 1 + |x|^2$$

连同 (3.1.5) 式可得

$$\begin{aligned} d(x, y) &= |\pi(\tilde{x}) - \pi(\tilde{y})| \\ &= |\phi_0(\tilde{x}) - \phi_0(\tilde{y})| \end{aligned}$$

$$= \frac{2|x-y|}{(1+|x|^2)^{\frac{1}{2}}(1+|y|^2)^{\frac{1}{2}}}$$

现在回到上述所定义的反射ϕ_0。若 $x\in\hat{R}^{n+1}$，则

$$|\phi_0(x)|^2 = 1 + \frac{4}{|x-e_{n+1}|^2} + \frac{4(e_{n+1},[x-e_{n+1}])}{|x-e_{n+1}|^2}$$

$$= 1 + \frac{4x_{n+1}}{|x-e_{n+1}|^2} \qquad (3.4.1)$$

这表明ϕ_0把下半空间$x_{n+1}<0$映入B^{n+1}。

令$\phi=\phi_0\sigma$，σ是关于平面 $x_{n+1}=0$ 的反射。则 ϕ 把平面$x_{n+1}=0$映射成S^n，把H^{n+1}映射成B^{n+1}。由（3.1.5）式得

$$\lim_{y\to x}\frac{|\phi(x)-\phi(y)|}{|x-y|} = \lim_{y\to x}\frac{|\phi_0(\sigma(x))-\phi_0(\sigma(y))|}{|y-x|}$$

$$= \lim_{y\to x}\frac{|\phi_0(\sigma(x))-\phi_0(\sigma(y))|}{|\sigma(x)-\sigma(y)|}$$

$$= \frac{2}{|\sigma(x)-e_{n+1}|^2}$$

在（3.4.1）式中将x改作$\sigma(x)$，即得

$$1-|\phi(x)|^2 = 1-|\phi_0(\sigma(x))|^2$$

$$= \frac{4x_{n+1}}{|\sigma(x)-e_{n+1}|^2}$$

故有

$$\lim_{y\to x}\frac{|\phi(y)-\phi(x)|}{|y-x|} = \frac{1-|\phi(x)|^2}{2x_{n+1}}$$

从§1.6知，这便是由H^{n+1}的度量ρ导出B^{n+1}的度量

$$ds = \frac{2|dx|}{1-|x|^2}$$

而且H^{n+1}上的等距映射ψ经$\psi\mapsto\phi\psi\phi^{-1}$而变成$B^{n+1}$上依此度量的等距映射。这表明作为$GM(\hat{R}^{n+1})$的子群的$GM(\hat{R}^n)$，与$GM(\hat{R}^{n+1})$内使$B^{n+1}$保持不变的元素组成的子群共轭。

现在我们来研究使单位球保持不变的Möbius变换。由于没有必要再在$\hat{R}^{n+1}$中研究这类变换，故可改成在$\hat{R}^n$中研究这类变换；于是，我们的研究对象是$GM(\hat{R}^n)$中满足$\phi(B^n)=B^n$的元素ϕ。

在作进一步讨论之前，顺便提一下，对B^n也可导出一个与(3.3.4)式类似的公式（见第七章）。事实上，我们只需判明是否有

$$\rho(0,x)=\log\left(\frac{1+|x|}{1-|x|}\right)$$

详细的讨论留给读者去作。

定理3.4.1 设ϕ是Möbius变换，满足$\phi(0)=0,\phi(B^n)=B^n$ 则$\phi(x)=xA$，A是某个正交矩阵。

［证］ 由定理3.2.5，∞也是ϕ的不动点，且如定理3.2.7所证，ϕ是一个欧几里德相似变换。因ϕ使原点和S^{n-1}保持不变，ϕ实际上是一个欧氏等距变换。因而定理的结论可从定理3.1.4推出。 □

容易看出，当且仅当$t=0$时关于平面$P(a,t)$的反射保持B^n不变。或更好地叙述成：当且仅当$P(a,t)$与S^{n-1}正交时，这一反射保持B^n不变；这样叙述的结论对所有的反射都适用。

定理3.4.2 设ϕ是关于$S(a,r)$的反射。则下列命题等价

(i) $S(a,r)$与S^{n-1}正交

(ii) $\phi(a^*)=0$（与之等价的有$\phi(0)=a^*$）

(iii) $\phi(B^n)=B^n$

［证］ 由

$$\phi(0)=a-r^2a^*=(|a|^2-r^2)a^*$$

可知(i)与(ii)等价。由于a和a^*是关于S^{n-1}的反演点，(iii)显然蕴含(ii)（定理3.2.5）。

最后，由(i)和(ii)连同(3.1.5)式即有

$$\begin{aligned}|\phi(x)| &= |\phi(x)-\phi(a^*)|\\ &= \frac{r^2|x-a^*|}{|x-a|\cdot|a^*-a|}\\ &= \frac{|a|\cdot|x-a^*|}{|x-a|}\end{aligned}$$

故

$$1-|\phi(x)|^2=\frac{(1-|x|^2)r^2}{|x-a|^2} \tag{3.4.2}$$

这就证明了(iii)。 □

作为(3.4.2)式的另一应用，我们注意到若ϕ使B^n保持不变，则

$$\frac{|\phi(x)-\phi(y)|^2}{(1-|\phi(x)|^2)(1-|\phi(y)|^2)}=\frac{|x-y|^2}{(1-|x|^2)(1-|y|^2)} \tag{3.4.3}$$

此式可从(3.1.5)和(3.4.2)直接推出。顺便指出，当ϕ是关于平面$P(a,0)$的反射时(3.4.3)式仍成立，因而对于所有使B^n保持不变的Möbius变换ϕ都成立。

(3.4.3)式所表达的不变性还推出

$$\lim_{y\to x}\frac{|\phi(y)-\phi(x)|}{|y-x|}=\frac{1-|\phi(x)|^2}{1-|x|^2}$$

这再一次证明了B^n中双曲度量的不变性。

在二维空间，z的复共轭$\bar{z}$是一个很有用的概念，按我们的记号可表示成

$$z^*=\frac{1}{\bar{z}}$$

熟悉的表达式$|1-\bar{z}w|$（z和w是复数）满足

$$|1-\bar{z}w|=|z|\ |z^*-w|$$

这启示我们引入定义

$$[u,v]=|u|\ |u^*-v| \qquad (u,v\in \mathbf{R}^n)$$

注意到

$$[u,v]^2=|u|^2|v|^2-2(u,v)+1$$
$$=|u-v|^2+(|u|^2-1)(|v|^2-1) \tag{3.4.4}$$

这表明

$$[u,v]=[v,u]$$

恒等式（3.4.4）还表明，若$|a|>1$，则当且仅当$|x|=1$时有

$$\frac{|x-a^*|}{[x,a^*]}=1$$

故有

$$S^{n-1}=\left\{x\in \mathbf{R}^n:\ \frac{|x-a^*|}{[x,a^*]}=1\right\}$$

亦即它是复平面上单位圆周方程

$$\left|\frac{z-w}{1-\bar{z}w}\right| = 1$$

的n维形式。

最后，由（3.4.4）式及（3.4.3）式所表达的不变性得到如下的不变性质

$$\frac{[\phi(x),\phi(y)]^2}{(1-|\phi(x)|^2)(1-|\phi(y)|^2)} = \frac{[x,y]^2}{(1-|x|^2)(1-|y|^2)} \tag{3.4.5}$$

习题 3.4

1．证明对于B^n中的x有

$$\rho(0,x) = \log\left(\frac{1+|x|}{1-|x|}\right)$$

并证明若x和y属于B^n则

$$\sinh^2\frac{1}{2}\rho(x,y) = \frac{|x-y|^2}{(1-|x|^2)(1-|y|^2)}$$

（应用(3.4.3)式）。

2．设ϕ和ψ分别是关于球面$S(a,r)$和$S(b,t)$的反射。求证：当且仅当$\phi(b)=\psi(a)$时两球面正交。

3． 试应用题1和题2证明：若$S(a,r)$与$S(0,1)$正交，以ϕ表示关于$S(a,r)$的反射，则

$$\sinh\frac{1}{2}\rho(0,\phi(0)) = \frac{1}{r}$$

并且对所有的x有

$$|\phi(x)-a|\cdot|x-a| = \frac{1}{\sinh^2\frac{1}{2}\rho(0,\phi(0))}$$

§ 3.5 Möbius变换的一般形式

我们证明$Möbius$变换具有如下的特征性质。

定理3.5.1 设ϕ是$Möbius$变换。

(i) 若 $\phi(B^n)=B^n$，则

$$\phi(x)=\sigma(x)A$$

其中σ是关于某个与S^{n-1}正交的球面的反射，A是一个正交矩阵。

(ii) 若$\phi(\infty)=\infty$，则

$$\phi(x)=r(xA)+x_0$$

其中$r>0$，$x_0\in R^n$，A是正交矩阵。

(iii) 若$\phi(\infty)\neq\infty$，则对某个r，x_0，A和反射σ有

$$\phi(x)=r(\sigma(x))A+x_0$$

注：$\sigma(x)A$表示先σ后A；矩阵A放在右边是由于我们所用的是行向量。

〔证〕 若ϕ使B^n保持不变，命σ是关于球面$S(a,r)$的反射，此处$a=\phi^{-1}(\infty)$，$|a|^2=1+r^2$。由定理3.4.2，σ（因而$\phi\sigma$）使B^n保持不变。经计算有$\sigma(0)=a^*$，故

$$\phi(\sigma(0))=\phi(a^*)=0$$

（因ϕ把反演点变成反演点）；于是有$\phi(\sigma x)=xA$，以$\sigma(x)$代替x即得（i）。

若∞是ϕ的不动点，则对一个适当的

$$\psi: x\mapsto(x-x_0)/r$$

映射$\psi\phi$使∞和B^n保持不变，从而也使原点保持不变。由定

理3.4.1即可推出（ii）。最后，应用（ii）于$\phi\sigma$可推出（iii），σ是把∞映为$\phi^{-1}(\infty)$的一个适当的反射。 □

性质（iii）引出等距球面的概念。假定$\phi(\infty)\neq\infty$，则

$$\phi(x)=r(\sigma x)A+x_0$$

其中σ是关于某个球面$S(a,t)$的反射，且（必定）有a $\phi^{-1}(\infty)$。由（3.1.5）式有

$$|\phi(x)-\phi(y)|=r|\sigma(x)-\sigma(y)|$$

$$=\frac{rt^2|x-y|}{|x-a|\cdot|y-a|}$$

因此ϕ是由方程$|x-a|=t_1, t_1=t\sqrt{r}$所确定的球面上的一个等距映射，事实上，极限值

$$\lim_{y\to x}\frac{|\phi(y)-\phi(x)|}{|y-x|}$$

按照x位于$S(a,t_1)$内，位于$S(a,t_1)$上和位于$S(a,t_1)$外而分别大于1，等于1和小于1。正由于此，我们称$S(a,t_1)$为ϕ的**等距球面**。

注意到，若以σ表示关于ϕ的等距球面的反射，则$\phi\sigma$使∞保持不变并且是这个等距球面上的欧氏等距映射。这推出定理3.5.1（ii）中的表达式必取如下形式

$$\phi\sigma(x)=xA+x$$

故一般地有

$$\phi(x)=\psi\sigma(x)$$

其中σ是关于等距球面的反射，ψ是一个欧氏等距映射。

在ϕ使B^n不变的特殊情形中，定理3.5.1（i）中的反

射σ必是关于ϕ的等距球面的反射，因为σ和A都是该球面上的欧氏等距映射。故可推断出：在此情形下，等距球面与S^{n-1}正交。

习题 3.5

1. 求证：若ϕ使B^n不变，则ϕ的等距球面的欧氏半径为

$$r=\frac{1}{\sinh\frac{1}{2}\ \rho(0,\phi(0))}$$

2. 求证：若Σ是ϕ的等距球面，则$\phi(\Sigma)$是ϕ^{-1}的等距球面。

§ 3.6 偏差定理

现在证明关于*Möbius*变换的两个精确的偏差定理。

定理3.6.1 设ϕ是作用在$\hat{\mathbf{R}}^n$上的*Möbius*变换，ρ是H^{n+1}中的双曲度量。则

$$\sup_{x,y\in\hat{\mathbf{R}}^n}\frac{d(\phi x,\phi y)}{d(x,y)}=\exp\rho(e_{n+1},\phi e_{n+1})$$

注：这表明ϕ在$\hat{\mathbf{R}}^n$上关于通弦距离d满足*Lipschitz*条件，且知最好的*Lipschitz*常数可通过作用在双曲空间$(H^{n+1},\ \rho)$上的ϕ来表达。

下一个结果表明，若一族*Möbius*变换在区域D内不取两个值ξ和η，则这一族变换在D的紧子集上等度连续；这就使我们能够建立一些相应的理论，例如关于$GM(\hat{\mathbf{R}}^n)$的正规族理论。

定理3.6.2 设D是$\hat{\mathbf{R}}^n$的一个子区域，ξ和η是$\hat{\mathbf{R}}^n$内不同

的两个点。若$GM(\hat{R}^n)$中的ϕ在D内不取ξ和η，则对D内所有的x和y有

$$d(\phi x,\phi y)\leqslant\frac{8d(x,y)}{d(\xi,\eta)d(x,\partial D)^{\frac{1}{2}}\ d(y,\partial D)^{\frac{1}{2}}}$$

常数8是最佳的。

〔定理3.6.1的证明〕 经关于$x_{n+1}=0$的反射，应用球极平面射影，不妨假定ϕ使B^{n+1}不变；需要证明的是

$$\sup_{x,y\in S^n}\frac{|\phi x-\phi y|}{|x-y|}=\exp\rho(0,\phi(0))$$

由定理3.5.1 (i)，在ϕ映射下的欧氏偏差与在ϕ的等距球面的反射σ映射下的偏差相同。在S^n上最接近等距球面S $(a,\ r)$的球心a的那个点处偏差最大（作为一个极限值而言）。于是，由于S $(a,\ r)$与S^n正交（见§3.5），从(3.1.5)式得到

$$\sup_{x,y\in S^n}\frac{|\phi(x)-\phi(y)|}{|x-y|}=\frac{r^2}{(|a|-1)^2}$$

$$=\frac{|a|+1}{|a|-1}$$

而

$$|a|=|\phi^{-1}(\infty)|=\frac{1}{|\phi^{-1}(0)|}$$

故上确界为

$$\frac{1+|\phi^{-1}(0)|}{1-|\phi^{-1}(0)|}=\exp\rho(0,\phi^{-1}(0))$$

$$= \exp \rho(\phi(0),0)$$ □

[定理3.6.2的证明]　设x和y是D内不同的点，α和β是D之外的不同点。由定理3.2.7，交比的乘积

$$[x,\alpha,y,\beta]\cdot[x,\beta,y,\alpha]$$

在ϕ的映射下不变。于是有

$$\left(\frac{d(\phi x,\phi y)}{d(x,y)}\right)^2 \leqslant \left(\frac{d(\alpha,\beta)}{d(\phi\alpha,\phi\beta)}\right)^2 \times \left(\frac{16}{d(x,\alpha)d(x,\beta)d(y,\alpha)d(y,\beta)}\right)$$

$$\leqslant \left(\frac{4}{d(\phi\alpha,\phi\beta)}\right)^2 \left(\frac{1}{d(x,\alpha)}+\frac{1}{d(x,\beta)}\right) \times \left(\frac{1}{d(y,\alpha)}+\frac{1}{d(y,\beta)}\right)$$

$$\leqslant \frac{64}{d(\phi\alpha,\phi\beta)^2 d(x,\partial D)d(y,\partial D)}$$

取 $\alpha=\phi^{-1}(\xi)$，$\beta=\phi^{-1}(\eta)$，即推出所要证明的不等式。

为证明常数8不能再改善，考虑作用在$\hat{C}$上的$\phi(z)=z+2m$和$D=\hat{C}-\{\infty,\ -m\}$。显然$\phi$在$D$内不取$\infty$和$m$，并且当$x=-2m$有

$$\lim_{y\to x}\frac{d(\phi x,\phi y)}{d(x,y)} \sim \frac{8}{d(\infty,m)\,d(x,\partial D)} \quad (m\to+\infty)$$ □

作为定理3.6.2的一个应用，我们简略地讨论一下正规族的概念。从一个度量空间(X,d)到另一度量空间(X',d')的函数族$\mathscr{F}$在X上**等度连续**当且仅当对每个正数ε存在正数

δ使得对X中的所有x和y及$\mathscr{F}$中的所有f，只要$d(x, y) < \delta$，就有 $d'(fx, fy) < \varepsilon$。等度连续函数族中每个函数在X上一致连续，这种一致性是关于f的也是关于点对(x, y)的。

族$\mathscr{F}$称为在X中正规，如果$\mathscr{F}$中取出的每个序列$f_1, f_2, \cdots$都存在子列在X的每个紧子集上一致收敛。有一个联系等度连续概念和正规族概念的一般结果（*Arzela-Ascoli*定理）。对此，按照本书的主要兴趣，我们只导出如下特殊情形下的结果。

命题3.6.3 $(\hat{R}^n, d)$到自身的*Möbius*变换族$\mathscr{F}$若在$\hat{R}^n$的子区域D的每个紧子集上等度连续，则$\mathscr{F}$在D内正规。

〔证〕 我们只叙述证明的大意，有兴趣的读者在参考文献中可找到*Arzela-Ascoli*定理的证明。求得一序列$x_1, x_2, \cdots$，使之在D内稠密。给定$\mathscr{F}$内的任一序列$\phi_1, \phi_2, \cdots$，（因$\hat{R}^n$是紧的）可选取子列在x_1收敛，然后选取这个子列的子列使之在x_2收敛，如此继续作下去。通过适当选取ϕ_n的子序列，可得到一个子列使得它是前述所选取的每一子序列的子列；因而我们构造了一个子列在每点x_j收敛。

取定D的任一紧子集K及任一正数ε。可用有限个（依照d度量）半径为δ的开球盖住K（δ是按等度连续定义对应于ε的正数）。在每个开球中选取一点x_j；不妨设所选定的点为$x_1, x_2, \cdots, x_s$。若y属于k，则对某个j有$d(y, x_j) < \delta$，因而有

$$d(\phi_n y, \phi_m y) \leqslant d(\phi_n y, \phi_n x_j) + d(\phi_n x_j, \phi_m x_j) + d(\phi_m x_j, \phi_m y)$$

$$\leqslant 2\varepsilon + d(\phi_n x_j, \phi_m x_j)$$

若$n, m \geqslant n_0$，则最后一项对所有的$x_1, \cdots, x_n$至大为ε；故在K上$d(\phi_n y, \phi_m y) \leqslant 3\varepsilon$。 □

现在可将定理3.6.2和命题3.6.3结合起来：

定理3.6.4 设D是$\hat{R}^n$的子区域，$\mathscr{F}$是一个Möbius变换族。假定对$\mathscr{F}$中的每个ϕ，均存在$\hat{R}^n$中的两个点α_ϕ，β_ϕ为ϕ在D中不取的值，并且

$$\inf_\phi d(\alpha_\phi, \beta_\phi) > 0$$

则$\mathscr{F}$在D内正规。

注：定理3.6.4中的不等式可改写为

$$\inf_\phi \left[\phi(\hat{R}^n - D)\text{的通弦直径}\right] > 0$$

〔证〕 对$\xi = \alpha_\phi$，$\eta = \beta_\phi$应用定理3.6.2，即可推出$\mathscr{F}$在D的每个紧子集上等度连续（事实上，它们满足一个一致的*Lipschitz*条件）。 □

定理3.6.5 设ϕ_1，ϕ_2，…是Möbius变换，并假定对三个不同的点x_1，x_2，x_3和三个不同的点y_1，y_2，y_3有$\phi_n(x_j) \to y_j$。则ϕ_1，ϕ_2，…包含一子列在$\hat{R}^n$上一致收敛于一个Möbius变换。

〔证〕 通过删去有限个ϕ_j（这显然不影响最终结果），可假定对每个n，i，j（$i \neq j$）有

$$d(\phi_n x_i, \phi_n x_j) \geqslant \frac{1}{2} d(y_i, y_j) > 0$$

这推出族$\{\phi_1, \phi_2, \cdots\}$在每个集$\hat{R}^n - \{x_i, x_j\}$内正

规（定理3.6.4），因而在$\hat{R}^n$内正规。由定理3.2.7（及其证明）可知，存在ϕ_j的子列在$\hat{R}^n$中一致收敛于某个ϕ，ϕ是一个Möbius变换。

习题 3.6

1. 试证明：当且仅当

$$\sup_{\phi\in F} \rho(e_{n+1}, \phi e_{n+1}) < +\infty$$

时，Möbius变换族F在$\hat{R}^n$内正规。其中$e_{n+1}=(0, \cdots, 0, 1)$是$H^{n+1}$中的点。

2. 求证：若两个Möbius变换在$\hat{R}^n$的一个开子集D上相等，则是$\hat{R}^n$上的同一变换；若Möbius变换ϕ_n在$\hat{R}^n$的某个开子集上一致收敛于I，则在$\hat{R}^n$上一致收敛于I。

§3.7 拓扑群结构

可以有种种方式赋予$GM(\hat{R}^n)$以拓扑群结构。其中最简单的构造是：注意到$GM(\hat{R}^n)$中的元素把紧空间$\hat{R}^n$映为自身，故

$$D(\phi, \psi) = \sup\ \{d(\phi x, \psi(x)) : x \in \hat{R}^n\}$$

是$GM(\hat{R}^n)$上的一个度量（式中的d是$\hat{R}^n$上的通弦度量）。显然，当且仅当ϕ_n在$\hat{R}^n$上一致收敛于ϕ时ϕ依此度量收敛于ϕ。

定理3.7.1 $GM(\hat{R}^n)$是关于由度量D所诱导的拓扑的一个拓扑群。

〔证〕 由定理3.6.1知对$GM(\hat{R}^n)$中的每个ϕ均存在

正常数$c(\phi)$，使得对一切x和y有

$$d(\phi x,\phi y)\leqslant c(\phi)d(x,y)$$

显然，对任何ϕ_1，ϕ_2和ψ还有

$$D(\phi_1\psi,\phi_2\psi)=D(\phi_1,\phi_2)$$

所以有

$$D(\phi\psi,\phi_1\psi)\leqslant D(\phi\psi,\phi_1\psi)+D(\phi_1\psi,\phi_1\psi_1)$$
$$\leqslant D(\phi,\phi_1)+c(\phi_1)D(\psi,\psi_1)$$

这表明复合映射$(\phi,\psi)\mapsto\phi\psi$在$(\phi_1,\psi_1)$连续。类似地，由

$$D(\phi^{-1},\psi^{-1})=D(\phi^{-1}\psi,I)$$
$$\leqslant c(\phi^{-1})D(\psi,\phi)$$

也可得映射$\psi\mapsto\psi^{-1}$在ϕ连续。 □

同一拓扑也可用以下的不同方式构造之。在$GM(\hat{\mathbf{R}}^{n+1})$中$GM(\hat{\mathbf{R}}^n)$共轭于使$B^{n+1}$保持不变的Möbius变换全体所组成的子群$GM(B^{n+1})$。若$GM(\hat{\mathbf{R}}^n)$中的$\phi$对应$GM(B^{n+1})$中的$\phi_1$，则（由通弦度量的定义）有

$$D(\phi,\psi)=\mathrm{Sup}\ \{|\phi_1x-\psi_1x|:x\in S^n\}$$

因而我们可用在后一度量(仍以D表示)下的$GM(B^{n+1})$代替$GM(\hat{\mathbf{R}}^n)$，这个度量是在欧氏意义下S^n上的一致收敛度量，并且共轭关系为$GM(\hat{\mathbf{R}}^n)$和$GM(B^{n+1})$间的等距映射。

对于B^{n+1}中每个非零的a，设σ_a是关于以a^*为中心且正交于S^n的球面的反射；则σ_a使B^{n+1}保持不变且$\sigma_a(a)=0$。再以τ_a表示平面$(x,a)=0$的反射。然后定义T_a为复合映射$\tau_a\sigma_a$，则可得到B^{n+1}的一个等距映射T_a，它使过a点的欧氏直径保持不变且$T_a(a)=0$。我们称如此构造成的等距映

射T_a为纯平移；当$a=0$时，定义T_a为恒等映射。

引理3.7.2 (i) $GM(B^{n+1})$ 到 B^{n+1}的映射 $\phi\mapsto\phi(0)$ 连续；(ii) B^{n+1}到纯平移集的映射$a\mapsto T_a$是同胚映射。

〔证〕 为证明(i)，先设$D(\phi_n, I)<\varepsilon$。B^{n+1}的每个欧氏直径L_j被ϕ_n映照成B^{n+1}内的一段圆弧$\phi_n(L_j)$（正交于S^n），其端点到L_j的端点的距离至多为ε。还可推出以L_j为轴且横截圆半径为ε的欧氏圆柱C_j包含$\phi_n(L_j)$，于是

$$\begin{aligned}\phi_n(0)&=\bigcap\phi_n(L_j)\\&\subset\bigcap_j C_j\\&=\{x\in B^{n+1}:|x|<\epsilon\}\end{aligned}$$

这表明若ϕ_n在S^n上一致收敛于I，则$\phi_n(0)\to 0$；事实上，

$$|\phi_n(0)|<D(\phi_n,I)$$

再设$\phi_n\to\phi$（因$GM(B^{n+1})$和B^{n+1}是度量空间，故只考虑序列收敛性便足够了）。由定理3.7.1有$\phi^{-1}\phi_n\to I$；故由上述证明结果有$\phi^{-1}\phi_n(0)\to 0$，因而$\phi_n(0)\to\phi(0)$。这就证明了(i)。

为证明(ii)，首先注意到$T_a\mapsto T_a^{-1}$连续（定理3.7.1）。由(i)，复合映射

$$T_a\mapsto T_a^{-1}\mapsto T_a^{-1}(0)$$

即$T_a\mapsto a$连续。

剩下的问题是要证明映射$a\mapsto T_a$连续。显然，当$b\to a$时，T_b在S^n上一致收敛于T_a。我们有关于ϕ_a和τ_a的显式表示式，连续性可通过直接估计得出；详细推导过程从略。□

从定理3.5.1得知，$GM(B^{n+1})$的每个元素ϕ均可唯一

地表示为

$$\phi(x) = (\sigma_a x) A$$

其中$a = \phi^{-1}(0)$，A是正交矩阵（A作用在σ_a之后；它被置于右边只是由于所采用的是行向量）。由此，ϕ还可唯一地表示成

$$\phi(x) = (T_a x) A_\phi$$

其中A_ϕ（即τ_a再复合上A）也是一个正交矩阵。这种表示方式建立了$GM(B^{n+1})$和$O(n+1) \times B^{n+1}$之间的一个自然的双射对应

$$\phi \mapsto (A_\phi, a), a = \phi^{-1}(0)$$

然而正交矩阵群$O(n+1)$本身是一个度量空间。首先存在自然的度量

$$|(a_{ij}) - (b_{ij})| = \left[\sum_{i,j} (a_{ij} - b_{ij})^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

其次还存在把$O(n+1)$视为$GM(B^{n+1})$的子集所诱导的度量D。事实上，两种度量确定的拓扑相同，因为若$A = (a_{ij})$ $B = (b_{ij})$，$C = A - B$，x属于S^n，则

$$\begin{aligned}
D(A,B)^2 &= \sup_{|x|=1} |xA - xB|^2 \\
&= \sup_{|x|=1} \sum_{j=1}^{n} (x_1 c_{1j} + \cdots + x_n C_{nj})^2 \\
&\leqslant \sup_{|x|=1} \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) \left(\sum_{i=1}^{n} C_{ij}^2\right) \\
&= |A - B|^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} C_{ij}^2\right)
\end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} |e_i A - e_i B|^2$$

$$\leqslant nD(A,B)^2$$

空间$O(n+1)\times B^{n+1}$也就有了一个自然的乘积拓扑，并且有如下结果。

定理3.7.3 双射$\phi\mapsto(A_\phi, a)$是$GM(B^{n+1})$到$O(n+1)\times B^{n+1}$的同胚映射。

〔证〕 本定理的证明可通过反复应用定理3.7.1和引理3.7.2作出。首先，$a\mapsto T_a$是连续的，因而映射$(A_\phi, a)\mapsto(A_\phi, T_a)$也连续。而$(A_\phi, T_a)$到两者的复合(即$\phi$)的映射是连续的，故$(A_\phi, a)\mapsto\phi$也连续。

其次，$\phi\mapsto a$ $(=\phi^{-1}(0))$连续，且$a\mapsto T_a$，$T_a\mapsto T_a^{-1}$都连续，故$\phi\mapsto T_a^{-1}$连续。由此推出复合映射

$$\phi\mapsto(\phi,T_a^{-1})\mapsto\phi T_a^{-1}=A_\phi$$

连续，所以$\phi\mapsto(A_\phi,a)$连续。 □

注：定理3.7.3显然意味着$GM(B^{n+1})$上通过双射对应从$O(n+1)\times B^{n+1}$诱导出来的拓扑与由度量D所诱导的拓扑相同。因$GM(\hat{R}^n)$和$GM(B^{n+1})$可等距同化，此结果也给$GM(\hat{R}^n)$上由度量D所诱导的拓扑提供了一种新的构造方式。

为了对此拓扑给出我们的第三种也是最后一种构造方式，我们需要另一双曲空间模型。

定义3.7.4 以Q表示如下定义的双曲面模型

$$Q=\{(x_0,x_1,\cdots,x_n)\in R^{n+1}: q(x,x)=1, x_0>0\}$$

此处

$$q(x,y)=x_0y_0-(x_1y_1+\cdots+x_ny_n)$$

注意到Q是两叶双曲面的一叶，且若$x\in Q$则

$$x_0^2=1+(x_1^2+\cdots+x_n^2)$$

因而事实上有$x_0\geqslant 1$。

再设$\gamma=(\gamma_0,\cdots,\gamma_n)$是$Q$上任一光滑曲线，于是对所有的$t$有

$$\gamma_0(t)^2=\gamma_1(t)^2+\cdots+\gamma_n(t)^2+1$$

求导得

$$\gamma_0(t)\dot{\gamma}_0(t)=\gamma_1(t)\dot{\gamma}_1(t)+\cdots+\gamma_n(t)\dot{\gamma}_n(t)$$

（因$q(\gamma,\gamma)=1$，故更简单地可写成$q(\gamma,\dot{\gamma})=0$）。由此，还可推出

$$\begin{aligned}q(\dot{\gamma},\dot{\gamma})&=\left(\frac{\gamma_1\dot{\gamma}_1+\cdots+\gamma_n\dot{\gamma}_n}{\gamma_0}\right)^2-(\dot{\gamma}_1^2+\cdots+\dot{\gamma}_n^2)\\&\leqslant(\sum\gamma_j^2)(\sum\dot{\gamma}_j^2)/\gamma_0^2-(\sum\dot{\gamma}_j^2)\\&=-(\sum\dot{\gamma}_j^2)/\gamma_0^2\\&\leqslant 0\end{aligned}$$

式中的各个求和号都是对$j=1,2,\cdots,n$求和。除了$\dot{\gamma}_1=\cdots=\dot{\gamma}_n=0$（这时也有$\dot{\gamma}_0=0$）的情况外上述严格不等式成立。这使我们能够按通常的方式由线元素

$$ds^2=dx_1^2+\cdots+dx_n^2-dx_0^2 \qquad (3.7.1)$$

构造Q上的度量，Q上两点的距离是当γ取遍所有连接这两点的曲线时积分

$$\int[-q(\dot{\gamma},\dot{\gamma})]^{\frac{1}{2}}\,dt$$

的下确界。伴随的度量拓扑是Q上的欧氏拓扑。我们现在将具有此度量的Q同具有度量

$$ds^2 = \frac{4|dx|^2}{(1-|x|^2)^2} \tag{3.7.2}$$

的B^n作一比较。

定理3.7.5 映射

$$F:(x_0, x_1, \cdots, x_n) \mapsto \left(\frac{x_1}{1+x_0}, \cdots, \frac{x_n}{1+x_0}\right)$$

是具有度量(3.7.1)的Q到具有度量(3.7.2)的B^n的一个等距映射。

〔证〕 为了简便，按通常的方式以x和y表示向量，且记

$$(y_1, \cdots, y_n) = \left(\frac{x_1}{1+x_0}, \cdots, \frac{x_n}{1+x_0}\right)$$

当$x \in Q$时，计算表明

$$|y|^2 = \frac{x_0 - 1}{x_0 + 1} \tag{3.7.3}$$

故$0 \leqslant |y| < 1$，因而F把Q映入B^n。

直接计算知

$$F^{-1}:(y_1, \cdots, y_n) \mapsto \left(\frac{1+|y|^2}{1-|y|^2}, \frac{2y_1}{1-|y|^2}, \cdots, \frac{2y_n}{1-|y|^2}\right) \tag{3.7.4}$$

确是F的逆映射，故F是Q到B^n的双射对应。

为验证F是等距映射，我们注意到有

$$dy_j = \frac{dx_j}{1+x_0} - \frac{x_j dx_0}{(1+x_0)^2}$$

应用此式及（3.7.3），即有

$$\frac{4(dy_1^2+\cdots+dy_n^2)}{(1-|y|^2)^2}$$

$$=(1+x_0)^2\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{dx_j}{1+x_0}-\frac{x_j dx_0}{(1+x_0)^2}\right)^2$$

$$=\sum_{j=1}^{n}dx_j^2+\frac{dx_0^2}{(1+x_0)^2}\sum_{j=1}^{n}x_j^2-\frac{2(\sum_{j=1}^{n}x_j dx_j)dx_0}{1+x_0}$$

$$=\sum_{j=1}^{n}dx_j^2+\left(\frac{x_0-1}{x_0+1}\right)dx_0^2-\frac{dx_0 d(x_0^2-1)}{1+x_0}$$

$$=\sum_{j=1}^{n}dx_j^2-dx_0^2$$ □

由上述定理可知Q的等距映射群$G(Q)$与B^n的等距映射群$GM(B^n)$同构，且有关系式

$$GM(B^n)=F(G(Q))F^{-1}$$

我们的目的是要证明$G(Q)$(因而$GM(B^n)$)的另一个完全不同的特征性质。

定理3.7.6 Q的等距映射恰好是一个$(n+1)\times(n+1)$矩阵，它使二次型$q(x,x)$和半空间$x_0>0$都保持不变。

［证］ 首先，设A是具有所述性质的任一矩阵。由于$x_0>0$保持不变且当$x\in Q$时有

$$q(xA,xA)=q(x,x)=1$$

即知A使Q保持不变。再者，对于Q上任一曲线γ令$\Gamma=\gamma A$，则$\dot{\Gamma}=\dot{\gamma}A$，故

$$q(\dot{\Gamma},\dot{\Gamma})=q(\dot{\gamma},\dot{\gamma})$$

这即表明γ和γA的长度相等。因此，每个这样的A是Q到自身的一个等距映射。

剩下的问题是要证明$GM(B^n)$中的每个ϕ具有$F(A)F^{-1}$的形式，A是某个如上所说的矩阵。为此，我们来直接计算$F(A)F^{-1}$在B^n上的作用。设$A=(a_{ij})$，i，$j=0$，$1,\cdots$，n，引入一些明显的记号，即

$$(y_1,\cdots,y_n)\overset{F^{-1}}{\longmapsto}(u_0,u_1,\cdots,u_n)$$

$$\overset{A}{\longmapsto}(v_0,v_1,\cdots,v_n)$$

$$\overset{F}{\longmapsto}(w_1,w_2,\cdots,w_n)$$

因

$$(v_0,\cdots,v_n)=(u_0,\cdots,u_n)A$$

故

$$v_j=u_0a_{0j}+\cdots+u_na_{nj}$$

应用（3.7.4）式即得

$$(1-|y|^2)v_j=(1+|y|^2)a_{0j}+2(y_1a_{1j}+\cdots+y_na_{nj})$$

因此

$$w_j=\frac{v_j}{1+v_0}$$

$$=\frac{(1-|y|^2)v_j}{(1-|y|^2)+(1-|y|^2)v_0}$$

$$=\frac{(1+|y|^2)a_{0j}+2(y_1a_{1j}+\cdots+y_na_{nj})}{|y|^2(a_{00}-1)+2(y_1a_{10}+\cdots+y_na_{n0})+(a_{00}+1)} \tag{3.7.5}$$

这是映射$F(A)F^{-1}$的显式表达式。

若A_0是$n\times n$正交矩阵（视作B^n的等距映射），则

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A_0 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

它使q保持不变，也保持条件$x_0>0$不变。在这种情形下从(3.7.5)式可推出$w=yA_0$，因此B^*的每个把原点变成原点的等距映射确以$F(A)F^{-1}$的形式出现。

我们只需证明关于同S^{n-1}正交的球面$S(\zeta, r)$的反射具有$F(A)F^{-1}$的形式。由于正交变换具有这种形式，故只需考虑ζ形如$(s, 0, \cdots, 0)$的情形即可。事实上，更方便的是引入另一正参数t，满足

$$\zeta = (c(t), 0, \cdots, 0), \quad c(t) = \frac{\cosh t}{\sinh t}$$

及

$$r = \frac{1}{\sinh t}$$

亦即满足正交性条件$|\zeta|^2 = 1 + r^2$。

现在考虑矩阵

$$P = \begin{pmatrix} \cosh 2t & \sinh 2t & 0 & \cdots & 0 \\ -\sinh 2t & -\cosh 2t & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & I_{n-1} & \\ 0 & 0 & & & \end{pmatrix}$$

显然有$\det(P) = -1$，并且P使二次型$q(x,x)$和半空间$x_0>0$保持不变。$F(A)F^{-1}$在B^n上的作用$y \mapsto w$由(3.7.5)式

给出，式中的分母可化简如下

$$
\begin{aligned}
&|y|^2(a_{00}-1)+2(y_1a_{10}+\cdots+y_na_{n0})+(a_{00}+1)\\
&\quad =2|y|^2\sinh^2 t-2y_1\sinh(2t)+2\cosh^2 t\\
&\quad =2|y-\zeta|^2\sinh^2 t\\
&\quad =2|y-\zeta|^2/r^2
\end{aligned}
$$

于是对 $j=2$，…，n，公式（3.7.5）化为

$$
w_j=\frac{r^2y_j}{|y-\zeta|^2}
$$

此外

$$
w_1=\frac{(1+|y|^2)\sinh(2t)-2y_1\cosh(2t)}{2|y-\zeta|^2\sinh^2 t}
$$

$$
=\frac{\sinh(2t)[|y-\zeta|^2+1-|\zeta|^2+2(y,\zeta)]-2y_1[2\cosh^2 t-1]}{2|y-\zeta|^2\sinh^2 t}
$$

$$
=c(t)+\frac{r^2}{|y-\zeta|^2}(\ _1-c(t))
$$

这证明 $F(P)F^{-1}$ 就是

$$
y\to\zeta+r^2(y-\zeta)^*
$$

即关于 $S(\zeta,r)$ 的反射。 □

鉴于定理3.7.6，我们简要考察一个使二次型 $q(x,x)$ 保持不变的矩阵组成的群 $O(1,n)$ 。若 $A\in O(1,n)$ ，则

$$
q(x,x)=q(xA,xA)
$$

故

$$
AJA'=J \tag{3.7.6}
$$

此处

$$J=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & & & \\ \vdots & & -I_n & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

我们推出 $\det(A)^2=1$；$O(1,n)$中行列式为1的子群是 $SO(1,n)$ 。

其次，我们证明$O(1,n)$中满足$a_{00}>0$的矩阵A的集也是一个子群。以$O^+(1,n)$表示这一子群，且记

$$SO^+(1,n)=SO(1,n)\cap O^+(1,n)$$

设矩阵A，B，C满足$a_{00}>0$，$b_{00}>0$，$C=AB$，则

$$\begin{aligned}c_{00}&=a_{00}b_{00}+\cdots+a_{0n}b_{n0}\\ &\geqslant a_{00}b_{00}-|a_{01}b_{10}+\cdots+a_{0n}b_{n0}|\\ &\geqslant a_{00}b_{00}-(a_{01}^2+a_{02}^2+\cdots+a_{0n}^2)^{\frac{1}{2}}(b_{10}^2+\cdots+b_{n0}^2)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

由(3.7.6)式，得

$$(a_{00},\ -a_{01},\ \cdots,\ -a_{0n})(a_{00},\ a_{01},\cdots,a_{0n})'=1$$

因而有

$$a_{00}^2=a_{01}^2+\cdots+a_{0n}^2+1$$

在(3.7.6)中以B代替A，并在两边取转置又可得

$$b_{00}^2=b_{10}^2+\cdots+b_{n0}^2+1$$

因而有$C_{00}>0$。

最后，A $(=(a_{ij}))$ 的逆矩阵等于 $(JAJ)'$ （这是因为 $A(JAJ)'=AJA'J=J^2=I$）于是$A\mapsto A^{-1}$使条件$a_{00}>0$得以保持，故$O^+(1,n)$确实是一个群。注意到$O(1,n)$的元素A使两叶双曲面$\{x:\ q(x,\ x)=1\}$保持不变；双曲面的分支Q为A-不变量的充要条件是$a_{00}>0$。

我们已经证明Q的等距映射恰好是$O^+(1,n)$的元素，并且在$O^+(1,n)$到$GM(B^n)$的同构对应$A\mapsto F(A)F^{-1}$下，子群$SO^+(1,n)$恰好对应于$GM(B^n)$中的所有直接共形元素（由定理3.7.6的证明知，每个反射对应于行列式为－1的矩阵）。现在，我们可以通过把自然拓扑从$O^+(1,n)$转移到$GM(B^n)$而诱导出$GM(B^n)$上的一个拓扑，并且不难看出，$O^+(1,n)$中矩阵的收敛性恰好对应于S^{n-1}上的一致收敛性；因此这一拓扑同前面构造的那些拓扑结构一致。回到$GM(\hat{R}^n)$，我们便已证明了如下的结果。

定理3.7.7 具有关于通弦度量的一致收敛拓扑的$GM(\hat{R}^n)$，作为拓扑群，它同构于由矩阵作成的群$O^+(1,n+1)$。

特别是，如果我们让$\hat{R}^2$与扩充复平面同化，则$M(\hat{R}^2)$是复Möbius变换

$$z\to\frac{az+b}{cz+d}, \quad ad-bc\neq 0$$

的全体，它同构于由那些使二次型$x_1^2+x_2^2+x_3^2-t^2$和不等式$t>0$保持不变的矩阵作成的Lorentz群。

习题 3.7

1．求证：若Möbius变换ϕ_m使B^{n+1}保持不变，且在S^n的某个相对开集上一致收敛于I，则ϕ_m在B^{n+1}和S^n上均一致收敛于I。（同化S^n与$\hat{R}^n$，并首先考虑在$\hat{R}^n$上的收敛性）。

2．假定$n=2$以使得定义3.7.4中的Q位于R^3中。求证B^2中过

原点的测地线在F和F^{-1}的映射下对应于Q与R^3中过原点的平面交成的曲线。

§ 3.8 注 记

新近关于$\hat{R}^n$中*Möbius*变换的论述可参看〔5〕，〔101〕和〔110〕；这方面的短篇论文可参看〔3〕，〔33〕和〔108〕。在〔19〕中给出一个基于二次型理论的更加代数化的论述。定理3.1.5的详细证明可参看〔36〕中的133页。

反积（§3.2)在〔7〕，〔21〕，〔22〕，〔110〕中作了讨论；它可以从双曲面模型的度量理论导出（参看〔110〕）。

众所周知，$\hat{R}^n$（或$\hat{R}^n$的一部份）中的（光滑）共形映射只能是*Möbius*变换；这一结论源出于*Liouville*(1850)，以后又得到大大地推广（主要是在减少光滑程度的要求方面）。更进一步的结果可参看〔105〕的15页和43页以及文中给出的参考文献；也可参看〔88〕。

第四章 复Möbius变换

§ 4.1 用四元数表示

本章研究 $\hat{R}^2$ 上的*Möbius*变换及其在 $\hat{R}^3$ 上的扩张。先将 R^2 与复平面 C 同化，C 的代数结构使我们能够用代数的方式表达*Möbius*变换。再让 R^3 中的点 (x,y,t) 同化对应于四元数

$$x + y\mathrm{i} + t\mathrm{j} \qquad (4.1.1)$$

（见2.4节）；这使我们能够用四元数代数来表示*Möbius*变换的*Poincaré*扩张。扩充复平面 $\hat{C} = C \cup \{\infty\}$ 则与 $\hat{R}^2$ 同化。若用四元数表达，则

$$H^3 = \{z + t\mathrm{j} : z \in C,\ t > 0\}$$

且 $\hat{C}$ 是 H^3 在 $\hat{R}^3$ 中的边界。

首先考虑常见的如下形式的*Möbius*变换

$$g(z) = \frac{az + b}{cz + d} \qquad (4.1.2)$$

其中 a，b，c，d 是给定的复数，满足 $ad - bc \neq 0$。后一条件使 $g(z)$ 不退化为常数，并且 c 和 d 不同时为零。因此，C 上的代数保证了当 $c = 0$ 时 g 在 C 上有定义，当 $c \neq 0$ 时 g 在 $C - \{-d/c\}$ 上有定义。在 $c = 0$ 时，补充定义 $g(\infty) = \infty$；在 $c \neq 0$ 时，又补充定义 $g(-d/c) = \infty$，$g(\infty) = a/c$。

这样，g就是$\hat{C}$到自身的一个一一映射（g^{-1}也具有同样的形式）。

这种映射的任何有限复合$g_1\cdots g_n$可经代数运算求出，作为其结果的映射g仍具有同样的形式。不过应当指出的是，代数运算只能在某个有限集E的余集上进行，因而$g=g_1\cdots g_n$只是在$C-E$上成立。但形如（4.1.2）的每个映射经前面所述的开拓之后便成为$\hat{C}$到自身的连续映射（此处的连续性是就通弦度量而言的），故由连续性，等式$g=g_1\cdots g_n$在$\hat{C}$上也成立。这些事实（留给读者证明）表明，形如（4.1.2)的映射类$\mathscr{M}$在通常的函数复合意义下是一个群。要证明$\mathscr{M}=M(\hat{R}^2)$，即为$\hat{C}$到自身的保向Möbius变换类。

在二维的情形中，反射（3.1.1）和（3.1.2）都具有如下形式

$$z\mapsto\frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d},\quad ad-bc\neq 0$$

两个这种映射的复合属于$\mathscr{M}$（同样可先用代数再借助连续性证明之），故$M(\hat{R}^2)\subset\mathscr{M}$。

再设g属于$\mathscr{M}$，且由（4.1.2）式给出。若$c=0$，则g是平移（若$a=d$）或再加上旋转和伸缩，即对某个α有

$$g(z)=\alpha+\frac{a}{d}(z-\alpha)$$

而在每种情形中，g都是偶数个反射的复合，故属于$M(\hat{R}^2)$。

若$c\neq 0$，g的等距圆周（见3.5节）为

$$Q_g=\{z\in C:|cz+d|=|ad-bc|^{\frac{1}{2}}\}$$

其重要性基于如下事实：若z和w属于Q_g，则

$$|g(z)-g(w)|=\frac{|(ad-bc)(z-w)|}{|(cz+d)(cw+d)|}=|z-w|$$

关于Q_g的反射σ有这一性质，从而$\phi=g\sigma$也具有这一性质。

因

$$\sigma(z)=-\frac{d}{c}+\frac{|ad-bc|}{|c|^2}\frac{\left(z+\frac{d}{c}\right)}{\left|z+\frac{d}{c}\right|^2}$$

故

$$\begin{aligned}\phi(z)&=g(\sigma(z))\\&=\frac{a\sigma(z)+b}{c\sigma(z)+d}\\&=\frac{a[c\sigma(z)+d]-(ad-bc)}{c[c\sigma(z)+d]}\\&=\frac{a}{c}-(\overline{cz+d})\frac{u}{c|u|}\end{aligned}\tag{4.1.3}$$

其中$u=ad-bc$。由于任何映射

$$z\mapsto\alpha\bar{z}+\beta,\quad|\alpha|=1$$

是奇数个反射的复合，故又有$g\in M(\hat{\mathbf{R}}^2)$，这就证明了$\mathscr{M}=M(\hat{\mathbf{R}}^2)$。

本书将采用记号$\mathscr{M}$而较少用$M(\hat{\mathbf{R}}^2)$。有许多论证，严格说来，在进行代数运算之后还需借助于连续性方能完成，对此我们以后不再提及。下一个结果是熟知的。

定理4.1.1 若z_1,z_2,z_3是$\hat{\mathbf{C}}$中三个不同的点，w_1，w_2，w_3是另外三个这样的点，则存在唯一的保向Möbius

变换把z_1，z_2，z_3**分别映射**为w_1，w_2，w_3。

现在推导(4.1.2)中g的四元数表示式。四元数(4.1.1)可表为$z+tj$，其中$z=x+iy$，而g的Poincaré扩张为

$$g(z+tj)=\frac{(az+b)\overline{(cz+d)}+a\bar{c}t^2+|ad-bc|tj}{|cz+d|^2+|c|^2t^2} \tag{4.1.4}$$

当$t=0$时显然与(4.1.2)同。我们仅对$c\neq 0$的情形验证(4.1.4)式；$c=0$的情形较为容易，就不再证明。

因σ的Poincaré扩张是$\hat{R}^3$中与Q_g有相同的中心和半径的球面的反射，故σ在$\hat{R}^3$中的作用为

$$\sigma(z+tj)=\frac{-d}{c}+\frac{|ad-bc|}{|c|^2}\frac{\left(z+\frac{d}{c}+tj\right)}{\left|z+\frac{d}{c}+tj\right|^2}$$

$$=\frac{-d}{c}+\frac{|u|}{cv}(cz+d+ctj)$$

其中　　$u=ad-bc$，$v=|cz+d|^2+|c|^2t^2$

为了方便可写成

$$\sigma(z+tj)=z_1+t_1j$$

于是

$$cz_1+d=\frac{|u|}{v}(cz+d),\qquad t_1=\frac{|u|t}{v} \tag{4.1.5}$$

g的Poincaré扩张可由ϕ和σ的扩张复合而得。σ的扩张已由上式给出，而ϕ（以及C的任何一个欧氏等距映射）的扩张为

$$\phi(w+sj)=\phi(w)+sj$$

因此

$$\begin{aligned}g(z+tj)&=\phi(\sigma(z+tj))\\&=\phi(z_1+t_1j)\\&=\phi(z_1)+t_1j\end{aligned}$$

应用（4.1.3）和（4.1.5）便可得（4.1.4）式所给出的形式。

若$ad-bc>0$，则可用四元数代数来描述g在$\hat{R}^3$中的作用。事实上

$$\begin{aligned}[a(z+tj)+b]\cdot[c(z+tj)+d]^{-1}&=[(az+b)+atj]\\&\quad\times[(cz+d)+ctj]^{-1}\\&=\frac{[(az+b)+atj][\overline{(cz+d)}-ctj]}{|cz+d|^2+|ct|^2}\\&=\frac{(az+b)\overline{(cz+d)}+a\bar{c}t^2+(ad-bc)tj}{|cz+d|^2+|c|^2t^2}\end{aligned}$$

而当$ad-bc>0$时这恰好就是$g(z+tj)$。

$GM(\hat{R}^3)$中的每个变换也可用四元数表示。例如，函数

$$f(w)=(w-j)(w+j)^{-1}j,\quad w=z+tj \qquad (4.1.6)$$

是$x_3=0$的反射与$S(e_3,\sqrt{2})$的反射的复合（注意$e_3=j$）。事实上，f把H^3映射成B^3，并且f在C上的限制就是§3.1中所讨论过的球极平面射影。一般地，有

$$\begin{aligned}f(z+tj)&=(z+[t-1]j)(z+[t+1]j)^{-1}j\\&=\frac{(z+[t-1]j)(\bar{z}-[t+1]j)j}{|z|^2+(t+1)^2}\end{aligned}$$

经化简，为

$$f(z+t\mathrm{j})=\frac{2z+(|z|^2+t^2-1)\mathrm{j}}{|z|^2+(t+1)^2} \qquad (4.1.7)$$

对于$t=0$，这给出C上球极平面射影的公式，且$f(\mathrm{j})=0$。

习题 4.1

1．设g由(4.1.2)式给定，且$c\neq 0$，求证：

(i) 当$d_1(z,\ \infty)\to 0$时$d_1(gz,\ a/c)\to 0$；

(ii) 当$d_1(z,\ -d/c)\to 0$时$d_1(gz,\infty)\to 0$

其中d_1是$\hat{C}$上的通弦度量。

2．设g由(4.1.2)和(4.1.1)给定，且$ad-bc=1$。求证：当且仅当

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in SU(2,\ \mathcal{D})$$

时，$g(\mathrm{j})=\mathrm{j}$

3．求证：任一欧氏等距映射g的Poincaré扩张都由式

$$g(z+t\mathrm{j})=g(z)+t\mathrm{j}。$$

给定，说明C的欧氏等距映射g在H^3上的作用，已知g使H^3中的j保持不变。

4．求证：关于$S(a,r)\,(a\in R^3)$的反射可用四元数表示成

$$w\mapsto(a\bar{w}+b)\,(c\bar{w}+d)^{-1}$$

其中a，b，c，d是适当的复数，当$w=z+t\mathrm{j}$时，定义$\bar{w}=z-t\mathrm{j}$。

5．设g由(4.1.2)式给定，且$c\neq 0$。求证：对于形如$x+\mathrm{i}y+t\mathrm{j}$的四元数$w$和$w'$有

$$g(w)-g(w')=(ad-bc)(wc+d)^{-1}(w-w')\cdot(cw'+d)^{-1}$$

并证明若$ad-bc=1$，则g在R^3中的球面 $S\left(-\dfrac{d}{c},\ \dfrac{1}{|c|}\right)$

上的作用为一欧氏等距映射。

§ 4.2 用矩阵表示

由公式$A\mapsto g_A$，可从$GL(2,C)$中的任一2×2矩阵A诱导出$\mathscr{M}$中的映射g，其中

$$A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix},\quad g_A(z)=\frac{az+b}{cz+d}$$

以Φ表示映射$A\mapsto g_A$，把$GL(2,C)$映射成$\mathscr{M}$；我们称g_A为A的**射影**或称A**表示**g_A。

经初等计算表明

$$g_A(g_B(z))=g_{AB}(z),\qquad z\in\hat{C}$$

其中AB是矩阵乘积，故Φ是一个同态。Φ的核K容易求得，因为当且仅当对$\hat{C}$中所有的z，等式

$$\frac{az+b}{cz+d}=z$$

均成立时，有$A\in K$。对于$A\in K$，若取$z=0,\ \infty,\ 1$即求得

$$A=\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & a\end{pmatrix},\qquad a\neq 0$$

显然这一形式的任何矩阵均属于K，从而

$$K=\mathrm{Ker}\,\Phi=\left\{\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & a\end{pmatrix}:\ a\neq 0\right\}$$

特别地，$\mathscr{M}$同构于$GL(2,C)/K$；用非正式用语可叙述为：

在不计一个非零因子的差别时，g_A对应于确定的矩阵 A。

一般地说，我们更关心Φ在$SL(2,C)$上的限制。这一限制的核为

$$K_0 = K \cap SL(2,C) = \{I, -I\}$$

因而U中的每个g恰好是$SL(2, C)$内两个矩阵（比如A和$-A$）的射影。这推出$\mathscr{M}$同构于$SL(2, C)/\{I, -I\}$。

两个函数

$$\frac{\mathrm{tr}^2(A)}{\det(A)}, \quad \frac{\|A\|^2}{|\det(A)|}, \quad A \in GL(2,C)$$

在变换$A \mapsto \lambda A$，$\lambda \neq 0$下不变，故它们诱导出U上相应的函数，即

$$\mathrm{trace}^2(g) = \frac{\mathrm{tr}^2(A)}{\det(A)} \tag{4.2.1}$$

和

$$\|g\| = \frac{\|A\|}{|\det(A)|^{\frac{1}{2}}}$$

其中A是以g为射影的任一矩阵。我们常常将 $\mathrm{trace}^2(g)$ 简记为$\mathrm{tr}^2(g)$，而以$|\mathrm{tr}(g)|$表示$|\mathrm{tr}^2(g)|$的正的平方根。这些函数具有重要的几何意义。我们现在来研究$\|g\|$而在§4.3讨论$\mathrm{tr}^2(g)$。显然，$\mathrm{tr}^2(g)$在任何共轭变换$g \mapsto hgh^{-1}$下均不变。

定理4.2.1 对$\mathscr{M}$中的每个g，有

$$\|g\|^2 = 2\cosh\rho(j, gj)$$

［证］ 设

$$g(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad-bc=1$$

由式（4.1.4）（取$z=0$，$t=1$），有

$$g(\mathrm{j})=\frac{(b\bar{d}+a\bar{c})+\mathrm{j}}{|c|^2+|d|^2}$$

根据（3.3.4）式，若$\zeta_1=z_1+t_1\mathrm{j}$，$\zeta_2=z_2+t_2\mathrm{j}$，则

$$\frac{|z_1-z_2|^2+(t_2-t_1)^2}{2t_1t_2}+1=\cosh\rho(\zeta_1,\zeta_2)$$

于是作代换$z_1=0$，$t_1=1$（即$\zeta_1=j$），$\zeta_2=g$（j）并应用 恒等式

$$|b\bar{d}+a\bar{c}|^2+1=|b\bar{d}+a\bar{c}|^2+|ad-bc|^2$$
$$=(|a|^2+|b|^2)(|c|^2+|d|^2)$$

便可推出定理的结论。 □

由（4.1.7）式可

$$f(w)=(w-\mathrm{j})(w+\mathrm{j})^{-1}\mathrm{j},\quad w=z+t\mathrm{j} \qquad (4.2.2)$$

是关于$\hat{C}$的反射再复合上关于$S(\mathrm{j},\sqrt{2})$的反射，它把H^3中的双曲度量变换成B^3中的度量

$$\mathrm{d}s=\frac{2|\mathrm{d}x|}{1-|x|^2}$$

作为运用四元数的另一个例子，我们考虑定理4.2.1的另一证明，这时计算是在B^3中进行。

［第二种证明］ 设$w=g(\mathrm{j})$，$\zeta=f(w)$，则$\zeta\in B^3$。因对任何四元数α和β均有

$$|\alpha\beta|=|\alpha|\,|\beta|,\quad |\alpha^{-1}|=|\alpha|^{-1}$$

故

$$|\zeta|=\frac{|(a\mathrm{j}+b)(c\mathrm{j}+d)^{-1}-\mathrm{j}|\cdot|\mathrm{j}|}{|(a\mathrm{j}+b)(c\mathrm{j}+d)^{-1}+\mathrm{j}|}$$

$$= \frac{|(aj+b)-j(cj+d)|\ |(cj+d)^{-1}|}{|(aj+b)+j(cj+d)|\ |(cj+d)^{-1}|}$$

$$= \frac{|(b+\bar{c})+(a-\bar{d})j|}{|(b-\bar{c})+(a+\bar{d})j|}$$

于是

$$|\zeta|^2 = \frac{(b+\bar{c})(\bar{b}+c)+(a-\bar{d})(\bar{a}-d)}{(b-\bar{c})(\bar{b}-c)+(a+\bar{d})(\bar{a}+d)}$$

$$= \frac{\|g\|^2+(bc-ad)+\overline{(bc-ad)}}{\|g\|+(ad-bc)+\overline{(ad-bc)}}$$

$$= \frac{\|g\|^2-2}{\|g\|^2+2} \qquad (4.2.3)$$

对于H^3中的度量和B^3中的度量都用记号ρ，则有

$$\rho(j,g(j)) = \rho(f(j),f(g(j)))$$

$$= \rho(0,\zeta)$$

$$= \log\frac{1+|\zeta|}{1-|\zeta|}$$

将$\rho(j,g(j))$ 简记为ρ，应用式（4.2.3），得

$$2\cosh\ \rho = e^{\rho}+e^{-\rho}$$

$$= \frac{2(1+|\zeta|^2)}{1-|\zeta|^2}$$

$$= \|g\|^2 \qquad \square$$

现在可按照*Möbius*变换的几何作用来回顾定理2.5.1和2.5.2。假定

$$A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix},\qquad g(z)=\frac{az+b}{cz+d}$$

其中A属于$SL(2,C)$，并假定f由（4.2.2）式给定。

定理4.2.2 下列命题等价

（i） $A\in SU(2,C)$

（ii） $g(j)=j$

（iii） $\|g\|^2=2$

（iv） fgf^{-1}是线性正交变换；

（v） g是通弦度量空间（$\hat{C},d$）的等距变换。

〔证〕 （ii）和（iii）的等价性是定理4.2.1的直接推论。因对$A\in SL(2,C)$有$\|A\|^2=\|g\|^2$，所以（i)和（iii）的等价性是定理2.5.1的直接推论。

其次，（ii）等价于

$$fgf^{-1}(0)=0$$

而由定理3.4.1，这等价于（iv）。

最后，（i）和（v）的等价性则可证明如下：注意到当且仅当对所有的z有

$$\frac{|g^{(1)}(z)|}{1+|g(z)|^2}=\frac{1}{1+|z|^2}$$

时，g为等距映射。从而，当且仅当对所有的z有

$$1+|z|^2=|az+b|^2+|cz+d|^2$$

时，（V）成立。或等价地有

$$1+|z|^2=(|a|^2+|c|^2)|z|^2+(|b|^2+|d|^2)+2\mathrm{Re}\times(a\bar{b}+c\bar{d})z$$

这等价于

$$|a|^2+|c|^2=|b|^2+|d|^2=1$$

及

$$a\bar{b}+c\bar{d}=0 \qquad \square$$

而这等价于$\overline{A'}A=I$，即（i）。

当然，定理4.2.2表明（镶嵌在B^3中的）正多面体的经典对称群对应于$SU(2,C)$的有限子群；事实上，B^3的每个旋转也可以用由$SU(2,C)$中的矩阵导出的复Möbius变换g来表示，因而正多面体对称群也可视为复Möbius的有限子群。

习题 4.2

1．求证：若$g(j)=w+sj$，则

$$\|g^2\|=(|w|^2+s^2+1)/s$$

2．设$SL(2,C)$的子群Γ射影于$\mathscr{M}$的子群G。求证：若Γ是离散群，则对H^3的每个紧子集K，在G中只对于有限个g有$g(j)\in K$。

3．求证：若$SL(2,C)$中的矩阵A为二级矩阵，则$A=I$或$-I$；若B是$SL(2,C)$中表示二阶Möbius变换的矩阵，则B是四级矩阵。

4．求证：g：$z\mapsto -z$不是$SL(2,R)$中任何矩阵的射影。验证$SL(2,R)$的射影是由那些使扩充了的实轴及C的上半平面保持不变的Möbius变换组成。

5．证明下列变换构成一个群

$$z\mapsto z; \quad z\mapsto \frac{3z-1}{7z-2}; \quad z\mapsto \frac{2z-1}{7z-3}$$

$$z\mapsto \frac{2z-1}{3z-2}; \quad z\mapsto \frac{z}{5z-1}; \quad z\mapsto \frac{3z-1}{8z-3}$$

并证明在H^3中存在唯一的一个点$w+tj$，它是这个群中每个元素的不动点。指出这个群在R^3中所对应的旋转群。

§ 4.3 不动点与共轭等价类

我们先简略地讨论一下与不动点有关的一些代数概念和几何概念之间的关系。开始时，我们将就一般的映射进行讨论，因为限于Möbius变换反而是不利的（那样的限制有可能使读者偏离主题）。

设X是任一非空集。X的**置换**是X到自身的一一映射；例如，关于球面的反射是$\hat{R}^n$的一个置换。置换g的**不动点**是X中满足$g(x)=x$的那些x；对这样的x，我们说g使x保持不变。

若G是X的任一置换群，则x在G内的稳定核G_x定义为G的如下子群

$$G_x=\{g\in G:g(x)=x\}$$

x的**轨道**（或G-轨道）$G(x)$定义为X的如下子集

$$G(x)=\{g(x)\in X:g\in G\}$$

显然，陪集系G/G_x与轨道$G(x)$之间存在一个**自然的一一对应关系**。若g和h都属于G，那么当且仅当$hG_x=gG_x$时$h(x)=g(x)$，而这就表明映射$hG_x\mapsto h(x)$是完全确定的并且是一一的。它显然把G/G_x映成$G(x)$并且就是所求的对应关系。这一事实也表明了陪集hG_x是G中把x映射成$h(x)$的元素g的全体。

如果对于G中某个h有$G_0=hG_1h^{-1}$，那么G的两个子群G_0

和G_1就称为共轭子群。由于当且仅当hgh^{-1}使$h(x)$保持不变时g使x保持不变，所以

$$G_{h(x)} = hG_x h^{-1}$$

于是，若x和y属于同一轨道，则G_x与G_y共轭。

共轭子群当然是彼此同构的；从几何的观点来看它们也是相同的。但并非任何同构子群都具有这一性质，例如由$z \mapsto z+1$和由$z \mapsto 3z$生成的子群是同构的，但它们的几何作用却完全不同。我们主要关心$\mathscr{M}$的子群的几何作用，因此，通常把结果叙述成在共轭变换下不变的形式。

设F_g是g的不动点的集合。若$gh = hg$，则显然有

$$g(F_h) = F_h,\quad h(F_g) = F_g \tag{4.3.1}$$

因为若$x \in F_h$，则

$$h(g(x)) = g(h(x)) = g(x)$$

从而$g(x) \in F_h$；故$g(F_h) \subset F_h$。以g^{-1}代替g就得到$g(F_h) = F_h$，类似地有$h(F_g) = F_g$。下面（定理4.3.6）将看到：当G是Möbius变换群时逆命题也成立。

现在我们回过头来研究$\mathscr{M}$中的变换。作用在$\hat{C}$上的Möbius变换g或只有一个不动点，或只有两个不动点，或为恒等映射。这给出了一个相当基本的分类法，但我们还可以得到基于$\hat{R}^3$中不动点的一种更精细的分类法。这种新的分类法在共轭变换下不变，这样就有一种更好的分类法，即分成共轭类。我们的主要结果之一是：由（4.2,1）式定义的函数tr^2是对共轭类的一种自然的参数化。

为了方便，我们引入一些标准化的Möbius变换。对于C中每个非零的k，定义

$$m_k(z) = kz \qquad (k \neq 1)$$

$$m_1(z) = z + 1$$

称之为标准形式。为了进一步应用，我们指出，对于一切k（包括$k = 1$）有

$$\operatorname{tr}^2(m_k) = k + \frac{1}{k} + 2 \qquad (4.3.2)$$

若g（$\neq I$）是任一Möbius变换，则g或者恰好在$\hat{C}$内有两个不动点α和β，或者在$\hat{C}$内只有唯一的不动点α（在这种情况下我们取β为异于α的某个点）。再设h是满足

$h(\alpha) = \infty$，$h(\beta) = 0$，$h(g(\beta)) = 1$（当$g(\beta) \neq \beta$时）的任一Möbius变换。显然

$$hgh^{-1}(\infty) = \infty, \quad hgh^{-1}(0) = \begin{cases} 0, & g(\beta) = \beta \\ 1, & g(\beta) \neq \beta \end{cases}$$

若g以α和β为不动点，则hgh^{-1}以0和∞为不动点，从而对某个k（$k \neq 1$）有$hgh^{-1} = m_k$。若g仅以α为不动点，则hgh^{-1}仅以∞为不动点，并且$hgh^{-1}(0) = 1$；于是有$hgh^{-1} = m_1$。这表明：任何Möbius变换$g(\neq I)$是某个标准形式m_k的共轭元素。这引出如下结果的一个简单证明。

定理4.3.1 设f和g是Möbius变换，且均非恒等映射。则当且仅当$\operatorname{tr}^2(f) = \operatorname{tr}^2(g)$时，$f$和$g$共轭。

为了简便，我们用～表示中$\mathscr{M}$的共轭关系。

〔证〕 从（4.2.1)式我们已注意到，若$f \sim g$，则$\operatorname{tr}^2(f) = \operatorname{tr}^2(g)$。

现在假定$\operatorname{tr}^2(f) = \operatorname{tr}^2(g)$。我们知道$f$和$g$分别共轭于某个标准形式，比如说$f \sim m_l$，$g \sim m_q$。于是有

$$\mathrm{tr}^2(m_p) = \mathrm{tr}^2(f) = \mathrm{tr}^2(g) = \mathrm{tr}^2(m_q)$$

应用（4.3.2）式，则有$p = q$或$p = 1/q$。注意到有$m_p \sim m_{1/p}$；当$p = 1$时这是平凡的，而当$p \neq 1$时有

$$hm_p h^{-1} = m_{1/p}, \quad h(z) = -\frac{1}{z}$$

我们已有$f \sim m_p$, $g \sim m_q$且$m_p \sim m_q$（因 $p = q$ 或$p = 1/q$）。因共轭关系是一个等价关系，这就证明了$f \sim g$。 □

现在我们对 *Möbius*变换就其在 $\hat{R}^3$中的不动点进行分类，当然是从研究标准形式的不动点入手。m_k在 $\hat{R}^3$中的作用由（4.1.4）式给出，即

$$m_k(z + t\mathrm{j}) = kz + |k|\, t\mathrm{j} \qquad (k \neq 1)$$

$$m_1(z + t\mathrm{j}) = z + 1 + t\mathrm{j}$$

由此可求出每个m_k的不动点。以下的结论是显然的

（i） 在$\hat{R}^3$中m_1以∞为不动点而无其他不动点；

（ii） 若 $|k| \neq 1$，则m_k以0和∞为不动点且在$\hat{R}^3$中无其它不动点；

（iii） 若 $|k| = 1$，$k \neq 1$，则m_k的不动点集合为

$$\{t\mathrm{j}: t \in R\} \cup \{\infty\}$$

定义4.3.2 设g（$\neq I$）是任一*Möbius*变换。则称

（i） g是**抛物变换**当且仅当在$\hat{R}^3$中 g 有一个唯一的不动点时（等价于$g \sim m_1$）；

（ii） g是**斜驶变换**当且仅当在 $\hat{R}^3$中g恰好有两个不动点时（等价于对某个满足 $|k| \neq 1$的k有$g \sim m_k$）；

（iii） g是**椭圆变换**当且仅当在 $\hat{R}^3$中g有无限多个不动点时（等价于对某个满足 $|k| = 1$，$k \neq 1$的 k有 $g \sim m_k$）。

为了方便，我们按照不变圆盘再对斜驶类进行细分。请注意，以下的用语并不通用，对于我们的“严格斜驶”有的作者称之为“斜驶”，对于我们的斜驶变换则没有称谓。

定义4.3.3 设g是斜驶变换。我们说g是双曲变换，如果对于$\hat{C}$中的某个开圆盘（或半平面）D有$g(D)=D$；否则称g为严格斜驶变换。

由定理4.3.1，上述定义中所作出的分类在共轭变换下不变，因而必可按照$\mathrm{tr}^2(g)$的值进行分类。这是我们的第二个结果。

定理4.3.4 设g（$\neq I$）是任一Möbius变换。则

(i) 当且仅当$\mathrm{tr}^2(g)=4$时，g是抛物变换；

(ii) 当且仅当$\mathrm{tr}^2(g)\in[0,4)$时，g是椭圆变换；

(iii) 当且仅当$\mathrm{tr}^2(g)\in(4,+\infty)$时，$g$是双曲变换；

(iv) 当且仅当$\mathrm{tr}^2(g)\notin[0,+\infty)$时，$g$是严格斜驶变换。

〔证〕 我们若验证了(i)，(ii)，(iii)；那么，(iv)也就不证自明了。在整个证明过程中，假定g共轭于标准形式m_p（g只与m_p和$m_{1/p}$共轭而不与其它的m_q共轭），由(4.3.2)式有

$$\mathrm{tr}^2(g)=p+\frac{1}{p}+2 \tag{4.3.3}$$

若g是抛物变换，则g只共轭于m_1；故$p=1$且$\mathrm{tr}^2(g)=4$。反之，若$\mathrm{tr}^2(g)=4$则$p=1$，故g是抛物变换。这就证明了(i)。

若g是椭圆变换，则$p=e^{i\theta}$，θ是实数并且$\cos\theta\neq1$。故

$$\mathrm{tr}^2(g)=2+2\cos\theta \tag{4.3.4}$$

因此有$\mathrm{tr}^2(g)\in[0,4)$。反之，假设$\mathrm{tr}^2(g)\in[0,4)$，则可将$\mathrm{tr}^2(g)$表示成（4.3.4）式的形式，且$\cos\theta\neq1$，故（4.3.3）的解$p=e^{i\theta},e^{-i\theta}$。于是$|p|=1$，且$p\neq1$，即推出$g$是椭圆变换。这就证明了（ii）。

最后来证明(iii)。首先设$\mathrm{tr}^2(g)\in(4,+\infty)$。则(4.3.3)有解$p=k$，$1/k$，此处的$k>0$。由于两个解都是正数，$m_f$必使上半平面保持不变，因而是双曲变换。这就意味着$g$是双曲变换。现在假设$g$是双曲变换，因而$m_f$也是双曲变换，设$D$是关于$m_f$不变的圆盘。对于$D$中任何一点$z$，$z$在关于$m_f$的迭代下的像属于$D$，故

$$\{p^n z: n\in Z\}\subset D$$

由于$|p|\neq1$，这表明0和∞属于D的闭色。选取D外部的z作同样的论证，推出0和∞位于D的边界上，因此D是半平面。然而要使D保持不变，m_f就必须使位于D边界上从0到∞的每条半直线保持不变。于是$p>0$，从而$\mathrm{tr}^2(g)>4$。 □

现在来证明三个与不动点有关的结果。回忆在任何一个群中，g和h的换位子是

$$[g,h]=ghg^{-1}h^{-1}=g(hg^{-1}h^{-1})$$

若A和B是$SL(2,C)$中对应于*Möbius*变换g和h的矩阵，则在相差一个因子-1的范围内是确定的，因而

$$\mathrm{tr}[g,h]=\mathrm{tr}(ABA^{-1}B^{-1})$$

是唯一确定的，它同A和B的选取无关。

定理4.3.5 （i） 当且仅当$\mathrm{tr}[g,h]=2$时两个*Möbius*

变换g和h在$\hat{C}$内有一个公共的不动点。

(ii) 若g和h(均非恒等映射)在$\hat{C}$内有一公共不动点，则或有

(a) $[g,h]=I$ (故$gh=hg$) 且$F_g=F_h$或有

(b) $[g,h]$是抛物变换 (且$gh\neq hg$) 且$F_g\neq F_h$。

[证] (i) 中的断语在共轭变换下不变，故可假定用$SL(2,C)$中的矩阵表达时有

$$g=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix},\qquad h=\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

计算表明

$$\operatorname{tr}[g,h]=2+b^2\gamma^2+b(a-d)\gamma(\alpha-\delta)-(a-b)^2\gamma\beta$$

若g和h有一个公共不动点，可设其为∞，因而有$\gamma=0$，$\operatorname{tr}[g,h]=2$。

再设$\operatorname{tr}[g,h]=2$，若g是抛物变换，可取$a=d=1$，$b\neq0$；故$\gamma=0$，从而g和h都以∞为不动点。若g不是抛物变换，可取$b=0$，从而$ad=1$并且$a\neq d$；于是$\gamma\beta=0$，即h以0和∞二者之一为其不动点。这就证明了(i)。

为了证明(ii)，仍可假定g和h如上且有$\gamma=0$。因此当且仅当

$$\beta(a-d)=b(\alpha-\delta)$$

时$[g,h]=I$。上式即等价于$F_g=F_h$(考虑$a=d$和$a\neq d$两种情况)。

证明(ii)的另一途径是，设公共不动点是∞，故g和h

都具有$z \mapsto az+b$的形式。映射$g \mapsto a$是$\langle g,h\rangle$到群$C\setminus\{$的同态；由于这个群是Abel群，每个换位子属于同态核，因而是一个平移（或I）。 □

欧氏相似变换是映射$x \mapsto r\phi(x)+x_0$，其中ϕ是欧氏等距映射，上一个定理的证明就涉及到了这种相似变换。事实上，定理4.3.5是一个关于欧氏相似变换的定理，只不过是以共轭变换下不变的形式叙述罢了。

定理4.3.6 设g和h是异于I的Möbius变换。则下列命题等价

(i) $hg=gh$

(ii) $h(F_g)=F_g$，$g(F_h)=F_h$

(iii) 或者$F_g=F_h$，或者g和h在H^3内有一个公共的不动点且$g^2=h^2=(gh)^2=I$，$F_g\cap F_h=\phi$。

〔证〕 首先，(4.3.1) 式表明 (i) 蕴含 (ii)。

(iii) 蕴含 (i) 的证明是容易的。若$F_g=F_h$则g和h有公共不动点，由定理4.3.5知$[g,h]=I$；故在这种情形下有$gh=hg$。在 (iii) 中的另一情形下也可导出$gh=hg$，因为有

$$hg=hg(ghgh)=gh$$

于是，(iii) 蕴含 (i)。

剩下的问题是要证 (ii) 蕴含 (iii)。假定 (ii) 成立并且$F_g\neq F_h$（否则 (iii) 当然成立）。这意味着存在点w只属于F_g和F_h两集合中的一个集合，不妨设$w\in F_g\setminus F_h$；于是有$g(w)=w$，$h(w)\neq w$。由 (ii)，F_g包含w，$h(w)$，$h^2(w)$，这些点不可能都不相同（否则$g=I$），故必有$w=h^2(w)$。这表明F_g只含有两个点，在h的映射下这两

点互换。这也表明$F_g \cap F_h = \phi$。

借助共轭变换，可假定$F_g = \{0, \infty\}$；从而对某个和b有

$$g(z) = az, \quad h(z) = \frac{b}{z}$$

于是显然有$h^2 = (gh)^2 = I$。又因$g(F_h) = F_h$，故必有$g(\sqrt{b}) = -\sqrt{b}$，进而有$a = -1$，$g^2 = I$。最后，g和h有一个属于H^3的公共不动点$|b|^{1/2}j$；这可直接从（4.1.4）式推出。

□

定理4.3.5涉及在$\hat{C}$内有公共不动点的两个变换；下一个定理则涉及在H^3内有公共不动点的变换。

定理4.3.7 当且仅当G的元素在H^3中有一个公共不动点时，$\mathscr{M}$的子群G只含椭圆元素（及I）。

从定义4.3.2推知，若g（$\neq I$）是有限阶元素则必为椭圆变换。因有限群中的每个元素都是有限阶的，故有以下推论。

推论 $\mathscr{M}$的有限子群中的元素在H^3内有一个公共不动点。

为便于理解证明的几何本质，我们引入椭圆元素g的轴的概念。若g在$\hat{C}$中的不动点是α和β，则（通过考察共轭变换为标准形式的情形即知）g在$\hat{R}^3$中的不动点是过α和β且与C正交的圆周Γ上的那些点。g是轴A_g是欧氏半圆周$\Gamma \cup H^3$（事实上，这是H^3的双曲几何中的一条测地线）。两椭圆元素g和h在H^3中有公共不动点可简单地说成两轴A_g和A_h在H^3内相交。顺便指出，此事成立的充分必要条件是g和h在$\hat{C}$中的不动点位于同一个圆周Q上，并且在Q上互相分隔。

在定理4.3.7的证明中，部份采用了代数的方法（几何证

明较复杂），尽管如此，我们仍将作出几何解释。先证明一个预备结果。

引理4.3.8 设g,h和gh是椭圆元素。则g和h在$\hat{C}$中的不动点共圆。若再加上$[g,h]$是椭圆元素或I的假定，则轴A_g和A_h在H^3内相交。

〔证〕 若g和h在$\hat{C}$中有公共的不动点，则$F_g\cup F_h$至多包含三个点，且位于某个圆周上。若加上$[g,h]$是椭圆元素或I的条件，则有$F_g=F_h$，进而有$A_g=A_h$；于是g和h在H^3中有无限多个公共不动点。

再设g和h在$\hat{C}$中无公共不动点。经共轭变换，可假定

$$g(z)=\alpha^2 z,\quad h(z)=\frac{az+b}{cz+d}$$

其中$\alpha^2\neq 1$，$|\alpha|=1, ad-bc=1$。因而有

$$\operatorname{tr}^2(h)=(a+d)^2,\quad \operatorname{tr}^2(gh)=(\alpha a+\bar{\alpha}d)^2$$

由定理4.3.4知数值

$$\lambda=a+d,\quad \mu=\alpha a+\bar{\alpha}d$$

属于区间$(-2,\ 2)$。解出a和d用α，λ和μ表示的表达式，即得$a=\bar{d}$；记

$$a=\bar{d}=u+\mathrm{i}v$$

h的不动点为

$$\frac{a-d\pm\mathrm{i}[4-(a+d)^2]^{\frac{1}{2}}}{2c}$$

（计算过程中用到$ad-bc=1$）即

$$\xi,\zeta=\frac{\mathrm{i}}{c}[v\pm(1-u^2)^{\frac{1}{2}}]$$

由 $|a+d|<2$，可知$u^2<1$，从而ξ和ζ位于一条过原点的直线L上；进而g和h的不动点共圆。

记$a=e^{i\theta}$，应用$ad-bc=1$，经计算得到

$$\mathrm{tr}^2([g,h])=4[1+2(|a|^2-1)\sin^2\theta]^2$$

因为必须满足

$$0\leqslant \mathrm{tr}^2([g,h])\leqslant 4$$

所以 $[g,h]$ 是椭圆元素（或I）的附加假设即意味着 $|a|\leqslant 1$。若 $|a|=1$，则有$u^2+v^2=1$，从而ξ和ζ中有一点是零，但这却又是应当排除的，因为我们已假定g和h没有公共不动点；于是 $|a|<1$，故

$$(1-u^2)^{\frac{1}{2}}>v$$

这意味着

$$\xi=\frac{is}{c},\quad \zeta=\frac{it}{c}$$

其中s和t是实数且$st<0$，因此原点（g的不动点）位于ξ和ζ之间，从而A_g和A_h在H^3中相交。 □

现在，我们应用引理4.3.8来得出$\mathscr{M}$中形如$\langle g,h\rangle$且只包含椭圆元素和I的子群的一些信息。首先，由引理 4.3.8，若g和h在H^3中有一个公共不动点ζ，那么$\langle g,h\rangle$的每个元素当然也以ζ为不动点。通过考虑共轭群，我们不妨假定g和h使B^3保持不变且$\zeta=0$。

引理4.3.9 设g和h（均$\neq I$）是使B^3保持不变并以原点为不动点的Möbius变换。则

(i) $\langle g,h\rangle$ 的每个元素有相同的轴和不动点；或者

(ii) 存在 $\langle g,h\rangle$ 中某个f使得三个轴 A_g，A_h，A_f不

共面。

暂且假定引理4.3.9成立，我们来完成定理4.3.7的证明。

〔定理4.3.7的证明〕 若G的每个椭圆元素都有相同的轴，定理的结论当然成立。因此可假定G中含有有不同轴的元素g和h。由引理4.3.8，g和h在H^3中有公共不动点，通过考虑其共轭群，我们不妨设G作用在B^3上且满足引理4.3.9的条件。由假设知引理4.3.9的（i）不成立，故其（ii）成立。

因$\langle g, h\rangle$的每一个元素以原点为不动点，故轴A_g，A_h，A_f是B^3的欧氏直径；且不共面。现取G中任一q，$q\neq I$。我们要证$q(0)=0$从而完成定理的证明。由引理4.3.8，q和g的不动点位于∂B^3上的某个圆周上，因而也位于一个欧氏平面Π_g内。因Π_g含直径A_g的端点，故知$0\in\Pi_g$；从而有$A_q\subset\Pi_g$。类似的定义和论证对Π_h和Π_f也成立；于是

$$0\in\Pi_g\cap\Pi_h\cap\Pi_f$$

$$A_q\subset\Pi_g\cap\Pi_h\cap\Pi_f \qquad (4.3.5)$$

平面Π_g，Π_h，Π_f不可能相同（否则A_g，A_h，A_f将共面），因此交集

$$\Pi_g\cap\Pi_h\cap\Pi_f$$

或者是$\{0\}$，或者是B^3的一条直径D。由于这个交集包含q在∂B^3上的不动点，故必是直径D，从而$A_q=D$（由4.3.5）。特别有$0\in A_q$，所以得到$q(0)=0$。 □

〔引理4.3.9的证明〕 $\langle g,h\rangle$的每个元素都以原点为不动点，故为椭圆元素（或I）。对于每个这样的椭圆元素f，以A_f表示f在B^3内的（不动点的）轴。注意到由假设，A_g和A_h是B^3的直径。

假定（i）不成立，则A_f和A_h是不同的直径，从而确定一个欧氏平面Π。设B^3中垂直于Π且过原点的直径为D。若$h(A_g)$不在Π上，则取$f = hgh^{-1}$；由于$A_f = h(A_g)$，这满足（ii）。若$g(A_h)$不在Π上，可构造类似的f。如此构作的f仅当g和h使Π保持不变时无效，此时它们都是二阶旋转。于是g和h都使D的端点交换位置，故对$f = gh$，（ii）满足。

我们以讨论Möbius变换的迭代来结束本节。

若g是抛物变换，则对某个h有

$$hgh^{-1}(z) = z + t \qquad (t \neq 0)$$

因而有

$$hg^n h^{-1}(z) = z + nt$$

$$g^n(z) = h^{-1}(h(z) + nt)$$

显然对于$\hat{C}$中每个点z，当$|n| \to \infty$时，$hg^n h^{-1}(z) \to \infty$；因此，一般地说，若$g$是抛物变换，则

$$g^n(z) \to \alpha$$

其中α是g的不动点。

若g不是抛物变换，则g有两个不动点，若设为α和β，则对某个h有

$$hgh^{-1}(z) = tz \qquad (t \neq 0,\ 1)$$

因而

$$hg^n h^{-1}(z) = t^n z$$

这些事实表明，若g是斜驶变换（等价于$|t| \neq 1$）且z不是α和β，则$g^n(z)$互不相同，并且凝聚于α和β中的一点。若$n \to +\infty$时$g^n(z) \to \alpha$，则称α为g的**吸收型不动点**，同时称β为g的**排斥型不动点**。于是对于所有的$z \neq \beta$，当$n \to +\infty$

时$g^n(z)\to\alpha$。

若g是椭圆元素（等价于$|t|=1$），则g具有不变圆周；事实上以α和β为反演点的每个圆周都是g-不变圆周，因而关于g的迭代的轨道必位于这样的一个圆周上。为今后引用方便，我们将上述结果总结为如下定理。

定理4.3.10 (i) 若g是以α为不动点的抛物变换。则对于$\hat{C}$中所有的z，当$n\to+\infty$时$g^n(z)\to\alpha$，并且在$\hat{C}\backslash\{\alpha\}$的每个紧子集上为一致收敛。

(ii) 若g是斜驶变换，则g的不动点α和β有如下特征：对于所有的$z\neq\beta$，当$n\to+\infty$时有$g^n(z)\to\alpha$，并且在$\hat{C}\backslash\{\beta\}$的紧子集上为一致收敛。

(iii) 若g是以α和β为不动点的椭圆变换。则g使以α和β为反演点的每个圆周保持不变。

如果*Möbius*变换g是k阶的，k为有限数（于是g^k为I，并且没有更小的幂次成为I），则g必是椭圆变换。在此情形下有

$$hgh^{-1}(z)=e^{i\theta}z$$

于是
$$\theta=\frac{2\pi m}{k}$$

其中m与k互素。这推出

$$\mathrm{tr}^2(g)=4\cos^2\frac{\theta}{2}$$

$$=2\left[1+\cos\left(\frac{2\pi m}{k}\right)\right]$$

注意到对k的不同素因子，可取不同的值。若g是二阶椭圆变

换，则$k=2$且必有$\mathrm{tr}^2(g)=0$；其逆也成立。显然，在所有的k阶元素g之中，$\mathrm{tr}^2(g)$ 的最大值在$m=1$或$k-1$时达到，其值为

$$\mathrm{tr}^2(g)=4\cos^2\frac{\pi}{k}$$

并且$\theta=\pm 2\pi/k$。为今后引用方便，我们也将此结果叙述成如下的定理。

定理4.3.11 设g是k阶椭圆变换。则

$$\mathrm{tr}^2(g)\leqslant 4\cos^2\frac{\pi}{k}$$

且仅当g是转角为$\pm 2\pi/k$的旋转时等号成立。

习题 4.3

1. 求$M\ddot{o}bius$变换g和h，使得

(i) $\mathrm{tr}^2[g,h]=-2$

(ii) g和h在$\hat{\mathbb{C}}$内无公共的不动点。

2. 设g是不以∞为不动点的任一$M\ddot{o}bius$变换。求证：$g=g_1g_2g_3$，其中g_1和g_3是以∞为不动点的抛物元素，g_2是二阶元素。

3. $M\ddot{o}bius$变换g的n次根是满足$h^n=g$的任一$M\ddot{o}bius$变换h。求证

(i) 若$g=I$，则g有无限多个n次根；

(ii) 若g是抛物变换，则g有一个唯一的n次根；

(iii) 在所有的其它情形中，g恰好有n个n次根。

4. 求证：若A和B属于$SL(2,\mathbb{C})$，则

$$\det(A-I)=2-\mathrm{tr}(A)$$

$$\det(AB-BA)=2-\mathrm{tr}[A,\ B]$$

（$[A,B]$是A和B的换位子）。并证明若A和B作为$M\ddot{o}bius$变换在$\hat{\mathbb{C}}$

内无公共不动点，则$AB-BA$是一个非奇异矩阵并且对应于一个二阶$M\ddot{o}bius$变换。

5. 设$g(z)=z/(cz+1)$。试(i)利用归纳法，(ii) 考虑适当的hgh^{-1}，证明：

$$g^n(z)=\frac{z}{ncz+1}$$

对于$f(z)=6z/(z+3)$，试求出f^n，并用归纳法证明所得结果。

§ 4.4 交 比

给定C的不同四点z_1，z_2，z_3，z_4，定义四点的交比为

$$[z_1,z_2,z_3,z_4]=\frac{(z_1-z_3)(z_2-z_4)}{(z_1-z_2)(z_3-z_4)}$$

将其同（3.2.5）式相比较，该处不允许作这样的除法。由连续性知，这一定义可以扩充到有一个z_j是∞的情形，比如

$$[z_1,z_2,z_3,\infty]=\frac{z_1-z_3}{z_1-z_2}$$

特别要指出

$$[0,1,z,\infty]=z \tag{4.4.1}$$

若
$$g(z)=\frac{az+b}{cz+d}\qquad(ad-bc\neq 0)$$

则
$$g(z)-g(w)=\frac{(z-w)(ad-bc)}{(cz+d)(cw+d)}$$

由此即可推出交比在$M\ddot{o}bius$变换下不变，即

$$[g(z_1),g(z_2),g(z_3),g(z_4)]=[z_1,z_2,z_3,z_4] \tag{4.4.2}$$

这是一个有用的性质，由此常可使问题大为简化。此外，其逆命题也成立；即若

$$[w_1, w_2, w_3, w_4] = [z_1, z_2, z_3, z_4] \qquad (4.4.3)$$

则存在某个Möbius变换g满足$g(z_j) = w_j$。为了证明这一事实,设f和h是把z_1，z_2，z_4映射成$0, 1, \infty$和把w_1，w_2, w_3映射成0，1，∞的Möbius变换；由定理4.1.1，它们是存在的。于是，由（4.4.1），（4.4.2）和（4.4.3）有

$$\begin{aligned} f(z_3) &= [0, 1, f(z_3), \infty] \\ &= [f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)] \\ &= [z_1, z_2, z_3, z_4] \\ &= [w_1, w_2, w_3, w_4] \\ &= [h(w_1), h(w_2), h(w_3), h(w_4)] \\ &= [0, 1, h(w_3), \infty] \\ &= h(w_3) \end{aligned}$$

若令$g = h^{-1} \circ f$，则显然有$g(z_j) = w_j$。 □

现在着手研究交比

$$\lambda = [z_1, z_2, z_3, z_4] \qquad (4.4.4)$$

在交换z_j的位置时的变化。我们曾以S_n表示$\{1, 2, \cdots, n\}$的置换群，并规定置换作用在左边；例如，(1,2) (1,3)把3映射成2。

S_4中每个σ所引起的交比值的变化由下式给出

$$\lambda = [z_1, z_2, z_3, z_4] \mapsto [z_{\sigma 1}, z_{\sigma 2}, z_{\sigma 3}, z_{\sigma 4}]$$

我们要证明一个基本的事实，即作为结果的这个值依赖于σ和λ，而与各个z_j的值无关。之所以如此，是因为若

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = [w_1, w_2, w_3, w_4]$$

则存在某个g满足$g(z_j)=w_j$，故有

$$[z_{\sigma 1}, z_{\sigma 2}, z_{\sigma 3}, z_{\sigma 4}] = [g(z_{\sigma 1}), g(z_{\sigma 2}), g(z_{\sigma 3}), g(z_{\sigma 4})]$$

$$= [w_{\sigma 1}, w_{\sigma 2}, w_{\sigma 3}, w_{\sigma 4}]$$

由于这一事实，我们可由下式引入函数f_σ（$\sigma\in S_4$）

$$f_\sigma(\lambda) = [z_{\sigma 1}, z_{\sigma 2}, z_{\sigma 3}, z_{\sigma 4}]$$

其中λ由（4.4.4）式给定。因

$$f_\pi(f_\sigma(\lambda)) = [z_{\pi\sigma 1}, z_{\pi\sigma 2}, z_{\pi\sigma 3}, z_{\pi\sigma 4}]$$

$$= f_{\pi\sigma}(\lambda)$$

故有重要的关系式

$$f_\pi f_\sigma = f_{\pi\sigma} \tag{4.4.5}$$

现在设σ是对换（1，2），并设g是把z_1，z_2，z_4分别映照成0，1，∞的$M\ddot{o}bius$变换。则

$$\lambda = [z_1, z_2, z_3, z_4]$$

$$= [0, 1, g(z_3), \infty]$$

$$= g(z_3)$$

故

$$f_\sigma(\lambda) = [z_2, z_1, z_3, z_4]$$

$$= [1, 0, \lambda, \infty]$$

$$= 1-\lambda$$

类似的论证对S_4中的所有六个对换都适用，经过简单的运算，即得

(i)　若$\sigma=(1,2)$或（3，4），则$f_\sigma(\lambda)=1-\lambda$；

(ii)　若$\sigma=(1,3)$或$(2,4)$，则$f_\sigma(\lambda)=\lambda/(\lambda-1)$；

(iii)　若$\sigma=(1,4)$或（2，3），则$f_\sigma(\lambda)=1/\lambda$。

由此可确定所有的f_σ。因为S_4可由对换生成，（i），

(ii)，(iii)连同(4.4.5)式一起足以给出所有的f_σ。顺便指出，对于每个对换σ，函数f_σ实际上就是把集合{0，1，∞}映为自身的Möbius变换。因此，若以$\mathscr{M}_0$表示把{0，1，∞}映为自身的Möbius变换的子群，则从(4.4.5)式知映射

$$\theta:\sigma\mapsto f_\sigma$$

实际是S_4到$\mathscr{M}_0$的同态($\mathscr{M}_0$与S_3同构)。附带指出，从(i)，(ii)，(iii)和(4.4.5)容易看出，S_4的子群

$$K=\{I,(1,2)(3,4),(1,3)(2,4),(1,4)(2,3)\}$$

包含在θ的核中。现在可以将此情况作出完整的描述。

定理4.4.1 映射θ：$S_4\to\mathscr{M}_0$是S_4到$\mathscr{M}_0$上的同态，并且以K为核。

[证] 定理4.1.1意味着$\mathscr{M}_0$恰好有六个元素；它们是λ的下列函数

$$\lambda,\ 1-\lambda,\ \frac{\lambda}{\lambda-1},\ \frac{1}{\lambda},\ \frac{1}{1-\lambda},\ \frac{\lambda-1}{\lambda}$$

S_4中有六个对换σ满足$\sigma(4)=4$。经直接计算表明，所对应的函数f_σ恰好是$\mathscr{M}_0$的六个元素。这表明θ把S_4映满$\mathscr{M}_0$，而这意味着θ的核恰好有四个元素，故这个核必是K。

$\hat{C}$中四个不同的点z_1，z_2，z_3，z_4共圆当且仅当它们位于某个圆周上。若g是把z_1，z_2，z_4分别映成0，1，∞的Möbius变换，则当且仅当$g(z_j)$共圆时z_j共圆，而前者成立的充要条件是$g(z_3)$为实数。但

$$\begin{aligned}g(z_3)&=[0,1,g(z_3),\infty]\\&=[z_1,z_2,z_3,z_4]\end{aligned}$$

故当且仅当$[z_1,z_2,z_3,z_4]$是实数时，z_1,z_2,z_3,z_4共圆。

若z_1，z_2，z_3，z_4位于圆周Q上，并且以这样的顺序环绕Q排列。则$g(z_3)>1$，因而

$$\lambda=[z_1,z_2,z_3,z_4]>1$$

习题 4.4

1．求证：把z_1，z_2，z_4分别映成0，1，∞的唯一的*Möbiu*变换是

$$g(z)=[z_1,z_2,z_3,z_4]$$

2．验证当$\sigma=(2,4)$时$f_\sigma(\lambda)=\dfrac{\lambda}{\lambda-1}$

3． 设z_1，z_2，z_3，z_4是$\hat{C}$中不同四点。证明：当且仅当

$$\operatorname{Re}[z_1,z_2,z_3,z_4]=0$$

时，过z_1，z_2，z_4的圆周与过z_1，z_3，z_4的圆周正交。将上述结果推广到两圆交成θ角的情形(附带指出当且仅当$\theta=0$时z_j共圆)。

4．设g是任一*Möbius*变换。求证：若z不是g的不动点，则$[z,gz,g^2z,g^3z]$与z无关；并用$\operatorname{tr}^2(g)$表示出它的值。

§ 4.5 $\mathscr{M}$上的拓扑

如§4.2所述，存在一个同态

$$\phi:SL(2,C)\to\mathscr{M}$$

使得对于$\mathscr{M}$中每个g恰好有$SL(2,C)$中两个矩阵A和$-A$与之对应。$SL(2,C)$是关于度量$\|A-B\|$的拓扑群，映射ϕ在$\mathscr{M}$上诱导出一个商拓扑$\mathscr{T}$，即$\mathscr{M}$上的最大拓扑；关于这个拓扑，ϕ为连续映射。附带指出，$\mathscr{M}$还具有$\mathscr{T}^*$，即关于$\hat{C}$上通弦度量的一致收敛拓扑（见§3.7）。一个基本的问

题是要搞清楚这两个拓扑是相同的。方法之一是通过$\mathscr{M}$在H^3（然后在B^3）上的作用指明$SL(2,C)$的作用与矩阵群$O^{\dagger}(1,3)$的作用类同。我们有必要再介绍一种更直接的方法。

定理4.5.1 $\mathscr{M}$上由ϕ所诱导的拓扑$\mathscr{T}$与$\hat{C}$上的一致收敛拓扑$\mathscr{T}^*$重合。

〔证〕 只需证明

$$\phi: SL(2,C) \to (\mathscr{M}, \mathscr{T}^*) \tag{4.5.1}$$

是一个连续的开映照就足够了（见命题1.4.1）。

若这个结论已证实，显然当X属于SL（2，C）时有

$$\| X-(-X) \| = 2\| X \| \geqslant 2\sqrt{2}$$

（参看§2.2的（X）），这推出如下结果。

推论4.5.2 ϕ在$SL(2, C)$内任一半径为$\sqrt{2}$的开球上的限制是一个同胚；$SL(2, C)$是$\mathscr{M}$的两叶覆盖空间。

剩下的问题是证明ϕ是连续开的映射。定义

$$\sigma(f,g) = \sup_{z\in\hat{C}} d(fz, gz)$$

其中d是通弦度量；于是$\mathscr{T}^*$是由度量σ诱导的度量拓扑。ϕ的连续性可从以下结果推出。

命题4.5.3 若SL（2，C）中的A对应于g，则

$$\sigma(g,I) \leqslant \sqrt{6}\ \| A-I \|$$

显然，若B对应于f，则

$$\begin{aligned}\sigma(g,f) &= \sigma(gf^{-1},I)\\ &\leqslant \sqrt{6}\ \| AB^{-1}-I \|\\ &\leqslant \sqrt{6}\ \| A-B \| \cdot \| B \|\end{aligned}$$

故ϕ在$SL(2, C)$的任一元素B上连续。

〔命题4.5.3的证明〕　存在一个表示Möbius变换h的酉矩阵B，使得hgh^{-1}以∞为不动点（h相当一个球面旋转，把选定的g的一个不动点移到∞）。由定理2.5.2和4.2.2，有

$$\|A-I\| = \|BAB^{-1}-I\|$$

和

$$\sigma(hgh^{-1}, I) = \sigma(gh^{-1}, h^{-1}) = \sigma(g, I)$$

这就表明可以不失一般性地假定∞为g的不动点。附带指出，若g是斜驶变换，则可假定g的排斥型不动点是∞（可适当选取h）。

然后设

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \delta \end{pmatrix}, \quad \alpha\delta = 1$$

关于斜驶变换情形g的不动点的假定，意味着在任何情况下均有

$$|\alpha| \leqslant 1 \leqslant |\delta|$$

而

$$d(z, gz) \leqslant d\left(z, \frac{\alpha z}{\delta}\right) + d\left(\frac{\alpha z}{\delta}, \frac{\alpha z+\beta}{\delta}\right)$$

$$\leqslant \frac{2|z|\left|1-\frac{\alpha}{\delta}\right|}{(1+|z|^2)^{\frac{1}{2}}\left(1+\left|\frac{\alpha z}{\delta}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}} + 2\left|\frac{\beta}{\delta}\right|$$

$$\leqslant \frac{2|z|\,|\alpha-\delta|}{|\delta|\,|2z|^{\frac{1}{2}}\left|\frac{2\alpha z}{\delta}\right|^{\frac{1}{2}}} + 2|\beta|$$

最后一行用到了算术一几何均值不等式。这一上界可化简为一个与z无关的值，应用$\alpha\delta=1$，即有

$$\begin{aligned}\sigma(g,I)&\leqslant|\alpha-\delta|+2|\beta|\\&\leqslant|\alpha-1|+|1-\delta|+2|\beta|\\&\leqslant(|\alpha-1|^2+|1-\delta|^2+|\beta|^2)^{\frac{1}{2}}(1+1+4)^{\frac{1}{2}}\\&=\sqrt{6}\,\|A-I\|\end{aligned}$$

□

最后需证明（4.5.1）是开映射，这可由以下结果推出。

命题4.5.4 若g_1，g_2，…是Möbius变换，假定$g_n(w)\to w$，$w=0$，1，∞。则

（i） 存在表示g_n的矩阵A_n收敛于I；

（ii） 在$\hat{C}$上g_n一致收敛于I。

［证］ 选取$SL(2,C)$中表示g_n的矩阵

$$A_n=\varepsilon_n\begin{pmatrix}a_n & b_n\\ c_n & d_n\end{pmatrix}$$

其中ε_n为1或-1将在后面再确定。在下面的论证中，若$g_n(\infty)=\infty$则要作一些显而易见的修改，我们将不考虑这样的情况。

因

$$d_n^2=\frac{1}{g_n(1)-g_n(0)}-\frac{1}{g_n(\infty)-g_n(0)}$$

$$\to 1$$

故可选取ε_n使得$\varepsilon_n d_n\to 1$。其次

$$(\varepsilon_n a_n)(\varepsilon_n d_n)=a_n d_n$$

$$= \frac{g_n(\infty)}{g_n(\infty) - g_n(0)}$$

$$\to 1$$

因而也有$\varepsilon_n a_n \to 1$。又因

$$c_n = \frac{a_n}{g_n(\infty)}, \quad b_n = d_n g_n(0)$$

知c_n和b_n趋于零；于是$A_n \to I$。这就证明了(i)。(ii) 容易从 (i) 和命题4.5.3推出。 □

最后，我们来完成定理4.5.1 的证明。设$\mathscr{B}$是$SL(2, C)$的一个开子集，假定$\phi(\mathscr{B})$不是$\mathscr{M}$（关于度量拓扑$\mathscr{T}^*$）的开子集。则存在属于$\phi(\mathscr{B})$的某个g和不属于$\phi(\mathscr{B})$的g_1，g_2，…使得

$$\sigma(g_n, g) \to 0$$

由
$$\sigma(g_n, g) = \sigma(g_n g^{-1}, I)$$

及命题4.5.4知存在表示$g_n g^{-1}$的矩阵A_n满足$A_n \to I$。若B $(\in \mathscr{B})$表示g，则$A_n B \to B$，故对所有充分大的n，$A_n B$属于$\mathscr{B}$。这就推出对这些n有$g_n (= \phi(A_n B))$属于$\phi(\mathscr{B})$，这是一个矛盾。 □

当且仅当定理4.5.1所描述的拓扑诱导出G上的一个离散拓扑时，$\mathscr{M}$的子群G是离散子群。由推论4.5.2容易看出，若G是离散的，则$\phi^{-1}(G)$是$SL(2, C)$的离散子群。反之，若Γ是$SL(2, C)$的离散子群，则$\phi(\Gamma)$是$\mathscr{M}$的离散子群。

当然，若G是$\mathscr{M}$的离散子群，则G是可数集(见§2.3)，设为$G = \{g_1, g_2, \cdots\}$，并且当$n \to +\infty$时有

$$\| g_n \| \to +\infty$$

下面的结果正是由于这一点才有用的。

定理4.5.5 设K是区域D(在$\hat{C}$中)的一个紧子集,g在D内不取0和∞。则存在某个只与D和K有关的正数m，使得对于K中所有的z和w均有

$$d(gz, gw) \leqslant \frac{m d(z, w)}{\| g \|^2}$$

〔证〕 定义m_1为

$$2m_1 = \inf \{ d(z, w) : z \in K, w \notin D \}$$

并设

$$g(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad - bc = 1$$

因$g^{-1}(\infty) \in D$，故对于K中的z有

$$2m_1 \leqslant d(z, g^{-1}(\infty))$$

$$\leqslant \frac{2|cz+d|}{(1+|z|^2)^{\frac{1}{2}}(|c|^2+|d|^2)^{\frac{1}{2}}}$$

对$g^{-1}(0)$ 有类似的不等式，故有

$$(1+|z|^2)\| g \|^2 m_1^2 \leqslant |az+b|^2 + |cz+d|^2$$

由

$$\frac{d(gz, gw)}{d(z, w)} \leqslant \left(\frac{1+|z|^2}{|az+b|^2+|cz+d|^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\times \left(\frac{1+|w|^2}{|aw+b|^2+|cw+d|^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

即可推出定理的结论。 □

这个定理意味着，当G离散且满足定理4.5.6的假设条件时，$g_n(K)$ 的通弦直径趋于零。

习题 4.5

1. 求证：若$ad-bc=1$，则对于所有的z均有

$$(|a|^2+|c|^2)(|az+b|^2+|cz+d|^2)\geqslant 1$$

当且仅当$z=-(\bar{a}b+\bar{c}d)(|a|^2+|c|^2)^{-1}$时等号成立。证明若$g(z)=(az+b)(cz+d)^{-1}$，则对所有的$z$均有

$$\frac{1}{||g||^2}\leqslant\frac{|az+b|^2+|cz+d|^2}{1+|z|^2}\leqslant||g||^2$$

2. 设G是使H^2保持不变的Möbius变换群。证明G中每一元素g都可唯一地表示成$g=fh$的形式，此处$f(z)=az+b(a>0,b\in R)$，h满足$h(i)=i$。并证明G与$R^2\times S^1$同胚。

3. 证明一个斜驶变换序列g_n有可能收敛于一个椭圆元素；而如果这个序列是一个这样的序列，那么对几乎一切的n，g_n是严格斜驶的。并证明椭圆元素的序列不可能收敛于一个斜驶元素。

§4.6 注 记

关于四元数和Möbius变换的讨论，可参看〔1〕,〔5〕和〔26〕。文献〔2〕和〔74〕研究了如何得出$SL(2,C)$的某个特殊子群的问题,此子群与给定的$\mathscr{M}$的子群同构。关于Möbius变换的更一般的信息可参看〔30〕（特别是关于等距圆周的讨论），〔51〕和〔52〕。关于定理4.2.2和4.3.7的详细讨论可参阅〔53〕。

第五章　不连续群

§ 5.1　初等群

这一节我们研究$\mathscr{M}$的一类结构特别简单的子群。这类子群中，有$\mathscr{M}$的所有有限子群，Abel子群以及$\mathbf{R}^3$中每一点的稳定核等。

定义5.1.1　$\mathscr{M}$的子群G称为**初等子群**，当且仅当在$\mathbf{R}^3$中存在一条有限的G-轨道。

此处的关键是“有限”二字。该定义并未提到离散性。$\mathscr{M}$是H^3的直接共形等距映射群的事实表明，只要在双曲空间H^3的闭包中存在一条有限G-轨道，G就是初等子群。

显然，若有某个点是G-不变的，那么G就是初等的。若G是Abel群，那么或者G只包含椭圆元素和I，或者G包含某个抛物(或斜驶)元素g。在第一种情况下，不管G是否为Abel群，由定理4.3.7知G是初等的；在第二种情况下，由定理4.3.6 (iii) 知G是初等的。因此$\mathscr{M}$的每个Abel子群都是初等子群。

注：有时也将满足如下条件的G定义为初等群，即对于G内每对无限阶元素g和h有$\mathrm{tr}[g,h]=2$；这等价于g和h在$\hat{C}$中有一公共不动点（定理4.3.5）。按照这个定义，H^3中点的稳定核就不必是初等群了。

现在假定G是一个初等群，$\{x_1,\cdots, x_n\}$是它的一条有

限轨道，我们来考察它们会出现几种情况。若g属于G，则点$g^m(x_j)$，$m=0,1,2,\cdots$，不可能都不相同，故存在整数m_j使得g^{m_j}以x_j为不动点。若m是诸m_j的乘积，则g^m以每个x_j为不动点。据此，可将初等群分成三个类型。

型1　$n\geqslant 3$或者$\{x_1,\cdots,x_n\}$不包含于$\hat{C}$。

若x_j不属于$\hat{C}$，则G中每个g都有某个幂次g^m以x_j为不动点。于是g^m及g本身是椭圆元素或I。若$n\geqslant 3$且诸x_j属于$\hat{C}$，则g^m在$\hat{C}$中至少有三个不动点，因而是恒等变换；故仍可断言G的每个非单位元素都是椭圆元素。这表明，若G属于型1初等群，则G只包含椭圆元素和I。由定理4.3.7，在H^3中存在某个x是G中每个元素的不动点；利用从H^3到B^3的一个映射使x对应于0，即知G在$GM(\hat{R}^3)$中共轭于特殊正交群$SO(3)$的一个子群（见定理3.4.1）。

型2　$n=1$并且x_1属于$\hat{C}$。

在这种情形下，G共轭于$\mathscr{M}$中一个子群，这个子群的每个元素均以∞为不动点，亦即具有$z\mapsto az+b$的形式。因而G共轭于复平面上欧几里德相似变换群。

型3　$n=2$并且x_1和x_2属于$\hat{C}$。

在这种情形下，G共轭于$\mathscr{M}$中一个子群，这个子群的每个元素均使$\{0,1\}$保持不变因而具有形式

$$z\mapsto az^s,\qquad a\neq 0,\quad s^2=1$$

从而G共轭于由$\left|\dfrac{dz}{z}\right|$引入度量的空间$C\setminus\{0\}$上的等距变换群。

现在我们来刻画所有的离散初等群。若G是型1的离散初等群，则必为有限群，且可假定G的每个元素都以H^3中的点j

为公共不动点。于是由定理4.2.1，G 中每个元素 g 均有 $\|g\|^2=2$。因此，G共轭于$SO(3)$ 的一个有限子群，从而共轭于某个正多面体对称群。

我们可以利用G是有限群的事实得出G的种种可能的构造，而无需涉及正多面体。我们说$\hat{C}$中的一点v是一个**顶点**，如果v是G中某个元素g（$\neq I$）的不动点；以V表示顶点的集合。现在我们考虑有限集

$$E=\{(g,v): g\in G,\ g\neq I,\ v\in V,\ g(v)=v\}$$

的元素个数$|E|$。因G中的每个元素g（$\neq I$）都是椭圆元素，而且恰好有两个顶点是g的不动点，故有

$$|E|=2(|G|-1)$$

由于顶点v的稳定核是G_v，故又有

$$|E|=\sum_{v\in V}(|G_v|-1)$$

集V可以被G划分成一些互不相交的轨道$V_1,\cdots,V_s$，因V_j中每个v的稳定核的元素个数相同，设为n_j，故有

$$|E|=\sum_{j=1}^{s}\sum_{v\in V_j}(|G_v|-1)$$

$$=\sum_{j=1}^{s}|V_j|(n_j-1)$$

最后，因每条轨道$G(v)$与陪集类G/G_v一一对应，故对于V_j中的v有$V_j=G(v)$，且

$$|V_j|=\frac{|G|}{|G_v|}=\frac{|G|}{n_j}$$

消去$|V_j|$得

$$2\left(1-\frac{1}{|G|}\right)=\sum_{j=1}^{s}\left(1-\frac{1}{n_j}\right) \qquad (5.1.1)$$

因不考虑平凡群，故$|G|\geqslant 2$，并且

$$1\leqslant 2\left(1-\frac{1}{|G|}\right)<2$$

由定义知$n_j\geqslant 2$，故有

$$\frac{1}{2}s\leqslant\sum_{j=1}^{s}\left(1-\frac{1}{n_j}\right)<s$$

这些不等式连同（5.1.1）式即可推出$s=2$或3。

情况1 $s=2$

在这种情形下，（5.1.1）式化为

$$2=\frac{|G|}{n_1}+\frac{|G|}{n_2}$$

由$n_j\leqslant|G|$有

$$|G|=n_1=n_2, \qquad |V_1|=|V_2|=1$$

因而在这种情形下只有两个顶点，并且每个顶点都是G中每个元素的不动点。经共轭变换，可取顶点为0和∞，从而G是复平面C的有限循环旋转群。

情况2 $s=3$

在这种情形下，（5.1.1）式化为

$$\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}=1+\frac{2}{|G|}$$

不妨设$n_1\leqslant n_2\leqslant n_3$。显然$n_1\geqslant 3$会导致矛盾的结果，故$n_1=2$，于是有

$$\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}=\frac{1}{2}+\frac{2}{|G|}$$

若$n_3 \geqslant n_2 \geqslant 4$则仍会得出矛盾的结果，故$n_2 = 2$或3。若$n_2 = 2$，则推出

$$(|G|, n_1, n_2, n_3) = (2n, 2, 2, n) \quad (n \geqslant 2)$$

这与平面正n角形的保向对称群（二面体群D_n）是同构的。此外，对于满足$s = 3$，$n_1 = 2$，$n_2 = 3$和

$$\frac{1}{n_3} = \frac{1}{6} + \frac{2}{|G|}, \qquad n_3 \geqslant 3$$

的那些情形，其整数解为

(i) $(|G|, n_1, n_2, n_3) = (12, 2, 3, 3)$

(ii) $(|G|, n_1, n_2, n_3) = (24, 2, 3, 4)$

(iii) $(|G|, n_1, n_2, n_3) = (60, 2, 3, 5)$

这些群分别同构于A_4，S_4和A_5，即四面体对称群，八面体对称群和二十面体对称群。更详细的讨论可参看5.5节所引的文献。

我们继续研究离散初等群。下一个结果揭示了型2和型3群之间的本质区别。

定理5.1.2 若g是斜驶元素，假定f和g只有一个公共不动点。则$\langle f, g \rangle$不是离散群。

［证］ 因离散性在共轭变换下保持不变，不妨设公共不动点为∞，即有

$$g(z) = az \ (|a| > 1), \ f(z) = az + b$$

（必要时可以g^{-1}代替g）。

于是有

$$g^{-n} f g^n(z) = az + a^{-n} b$$

由f和g只有一个公共不动点，知$b \neq 0$。因$|a| > 1$，序列

$$\|g^{-n}fg^{n}\|,\quad n=1,2,\cdots$$

是由互不相同的数值组成的收敛列；因此$\langle f, g\rangle$不是离散的。为使证明更加直观明了，读者可画一个图，标出点z，$g^{n}z$，$fg^{n}z$和$g^{-n}fg^{n}(z)$的位置（n充分大）。 □

现在假定G是离散初等群，但不是型1初等群。那么，G必含有抛物（或斜驶）元素。若G有一以∞为不动点的抛物元素g，则G的每个元素都以∞为不动点（因为所有其他轨道是无限集），并且G没有斜驶元素（由定理5.1.2）。这样的一个群属于型2群。若G有一以0和∞为不动点的斜驶元素g，那么G的每个元素都使集合$\{0,\infty\}$保持不变。而这即意味着G不可能含有抛物元素，故G属于型2或型3群。

现在来考察具有抛物元素的型2离散群的构造。这时，G所含元素除I和抛物元素外，还可能有椭圆元素。

经共轭变换，可假设G的每个元素均以∞为不动点，因而具有形式：$z\mapsto\alpha z+\beta$。由于这种变换或是椭圆的，或是抛物的，故有$|\alpha|=1$；于是G共轭于$\mathbb{C}$上的欧氏等距映射群。

我们称α为映射$z\mapsto\alpha z+\beta$的乘子，通常以α_g表示g的乘子。显然，当且仅当g是抛物元素或I时$\alpha_g=1$。容易验证G中元素的乘子的集S是$\{|z|=1\}$的一个（乘法）子群，并且以$\theta(g)=\alpha_g$定义的映射θ：$G\to S$是G到S的同态。当且仅当g是抛物或恒等变换时$\alpha_g=1$的断语等价于θ的核T是G中的平移子群。因G/T同构于$S(=\theta(G))$，所以我们可以通过给出S和T的具体表达式来刻画G；这有助于把抛物元素和椭圆元素分开。

首先证明S是有限循环群。G含有平移变换，设为$f(z)=z+\lambda$。若$g(z)=\alpha z+\beta$属于G，则有

$$gfg^{-1}(z) = z + \alpha\lambda$$

这就推出，对于S中每个s，G包含$z \mapsto z + s\lambda$。而由G是离散群可知S在$\mathbf{C}$中无凝聚点；于是S是 $\{|z| = 1\}$ 上的一个有限子群，并且它必定是一个循环群。

我们甚至可以获得关于S的更多的信息。设f和g如上文所给，则

$$f^{-1}(gfg^{-1})(z) = z + (\alpha - 1)\lambda$$

因而如果 $|\alpha - 1| < 1$，则必存在G中的平移变换$z \mapsto z + \lambda_1$满足

$$|\lambda_1| = |(\alpha - 1)\lambda| < |\lambda|$$

同样的论证得出G中的平移变换$z \mapsto z + \lambda_n$满足

$$|\lambda_n| = |\alpha - 1|^n |\lambda| \to 0, \quad n \to +\infty$$

而这违背了G的离散性。于是对于S中的每个α均有$|\alpha - 1| \geqslant 1$，由于S是循环群，比如说

$$S = \{1, \omega, \omega^2, \cdots, \omega^{q-1}\}$$

其中

$$\omega = \exp\left(\frac{2\pi i}{q}\right)$$

可以看出$q \leqslant 6$。事实上，$q \neq 5$；因为

$$fgfg^{-1}(z) = z + (\alpha + 1)\lambda$$

以与上述完全相同的理由断言必有$|\alpha + 1| \geqslant 1$，这意味着$q \neq 5$；因若$q = 5$就有$|\omega^2 + 1| < 1$。其余的可能性，即$q = 1, 2, 3, 4$和6，都存在。

现在来讨论T。设Λ是λ_1的集，λ_1是使$z \mapsto z + \lambda_1$属于G的复数；令$\Lambda^* = \Lambda - \{0\}$。由于$G$是离散群，$\Lambda$在$\mathbf{C}$中不可能有凝聚点，故$\Lambda^*$含有一个具有最小模（大于零）的元素$\lambda$。若$\Lambda = \{n\lambda; n \in \mathbf{Z}\}$，则

$$T = \{ z \mapsto z + n\lambda : n \in \mathbf{Z} \} \qquad (5.1.2)$$

如果不是这样，则在$\Lambda^* - \{n\lambda: n\in \mathbf{Z}\}$中存在一个具有最小模（大于零）的元素$\mu$；显然有$|\mu| \geqslant |\lambda|$。平移变换

$$z \mapsto z + n\lambda + m\mu, \quad m, n \in \mathbf{Z} \qquad (5.1.3)$$

属于G，我们要证明T恰好是由这些平移变换所组成。μ显然不是λ的实数倍（否则可表示成$\mu = (k+\delta)\lambda$，其中$k\in Z$，$0\leqslant \delta < 1$，并且应考虑$\delta\lambda$）。因而λ和μ生成（$\mathbf{R}^1$上的）向量空间$\mathbf{C}$，若$z \mapsto z+\gamma$属于G，即可表示成

$$\gamma = (n_1 + x)\lambda + (m_1 + y)\mu$$

其中$n_1, m_1 \in \mathbf{Z}$且$x, y \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$。于是$\gamma - n_1\lambda - m_1\mu$属于$\Lambda$并且

$$|\gamma - n_1\lambda - m_1\mu| = |x\lambda + y\mu| < |\mu|$$

之所以有严格的不等式是因为λ和μ是线性无关的。这就推出

$$\gamma - n_1\lambda - m_1\mu \in \{ n\lambda : n \in \mathbf{Z} \}$$

故T恰好是平移变换（5.1.3）的集合。

现在就可以来描述G了。在G中选取g，使之具有乘子ω，该ω生成S。于是g，g^2，…，g^{q-1}的乘子为ω，ω^2，…，ω^{q-1}（$\omega^q = 1$，$q \leqslant 6$），故G具有陪集分解式

$$G = T \cup Tg \cup \cdots \cup Tg^{q-1}$$

这表明G的每个元素具有形式

$$z \mapsto \omega^k z + n\lambda + m\mu$$

其中k，m，n是整数，$0 \leqslant k \leqslant q$且$q \leqslant 6$，$q \neq 5$。

其次，设G是具有斜驶元素的离散初等群。先假定G的每个元素都以0和∞为不动点，则具有形式

$$g(z)=az,\qquad a\neq 0$$

由$\theta(g)=|a_g|$ 定义的映射 $\theta: G\to\{x\in \mathbf{R}^1: x>0\}$ 是G到正实数乘群的一个同态。这时θ的核E由I和G中所有椭圆元素组成。由于G(因而E)是离散的，知E是由$z\mapsto \omega z$生成的有限循环群，其中$\omega^q=1$。

象集$\theta(G)$是集合$\{|a_g|: g\in G\}$。这个集不可能以1为凝聚点；否则存在G的不同元素g_n满足

$$\|g_n\|^2=|a_n|^2+\frac{1}{|a_n|^2}\to 2\qquad (g_n(z)=a_n^2 z)$$

这与离散性相违。容易看出，乘法群$\theta(G)$具有形式

$$\theta(G)=\{\lambda^n: n\in \mathbf{Z}\}$$

其中λ是某个正数。不妨设$g(z)=az$，$|a|=\lambda$；于是G具有陪集分解式

$$G=\bigcup_{n\in \mathbf{Z}} Eg^n$$

并且G的每个元素具有形式

$$z\mapsto \omega^k a^n z \tag{5.1.4}$$

其中$n\in Z$, $k\in \mathbf{Z}$且$0\leqslant k<q$。若$|a|=1$，则$\theta(G)$是平凡群，而且G是型1有限循环群；否则，G是无限群，它含有斜驶元素，并且无论如何不会含抛物元素。

最后，我们考察这一类型的一般离散初等群。不妨设$\{0, \infty\}$是G不变的，且以G_0表示G中以0和∞为不动点的那些元素，因而G_0具有(5.1.4)式所给出的形式。若G_0是G的真子群，则G必含有某个元素h满足

$$h(0)=\infty,\qquad h(\infty)=0$$

通过再一次的共轭变换(保持0和∞不变)，可假定$h(1)$

$=1$；因而$h(z)=1/z$。若G中的f使0和∞互换，则$fh\in G_0$，因而G_0是G中指数为2的子群；这表明G的所有元素或具有（5.1.4）的形式或具有形式

$$z \longmapsto \omega^k \alpha^n \frac{1}{z}$$

这就完成了我们对所有离散初等群的讨论。一般地说，我们更感兴趣的是$\mathscr{M}$的非初等子群。在结束本节前，我们再介绍两个不涉及离散性的结果，这些结果给出了非初等群的必要条件。从第一个结果就可看出这类子群的复杂性。

定理5.1.3 $\mathscr{M}$的每个非初等子群G包含无限多个斜驶元素。这些元素中的任何两个元素都没有公共不动点。

［证］ 先证G有斜驶元素。假定G没有斜驶元素，若G只含I和椭圆元素，则G是初等群。故G含有一抛物元素，可取其为

$$f(z)=z+1$$

G中任意的g均可设为

$$g(z)=\frac{az+b}{cz+d}, \qquad ad-bc=1$$

由此求出

$$f^n g(z)=\frac{(a+nc)z+(b+nd)}{cz+d}$$

及

$$\operatorname{tr}^2(f^n g)=(a+d+nc)^2$$

根据假定，$f^n g$不是斜驶元素，从而对所有的整数n有

$$0\leqslant (a+d+nc)^2\leqslant 4$$

故$c=0$。这意味着G的每个元素都以∞为不动点，于是G是初

群等；与定理条件矛盾。因此，每个非初等群都含有斜驶元素。

现在考察任意一个非初等群G，并设g是G的一个以α和β为不动点的斜驶元素。因G非初等，故存在G中某个f不使$\{\alpha,\ \beta\}$保持不变。有两种可能：

（i）$\{\alpha,\ \beta\}$和$\{f\alpha,\ f\beta\}$不相交；

（ii）$\{\alpha,\ \beta\}$和$\{f\alpha,\ f\beta\}$仅有一个公共点。

在情形（i）时，g和$g_1=fgf^{-1}$是没有公共不动点的斜驶元素。容易看出$g^n g_1 g^{-n}$（$n\in\mathbf{Z}$）就是满足要求的一列斜驶元素，因为$g^n g_1 g^{-n}$的不动点是$g^n f\alpha$和$g^n f\beta$，它们是互不相同的，并且收敛于α和β（见定理4.3.10）。

在情形（ii）时，g和g_1恰好有一个公共不动点，设为α，故由定理4.3.5，$p=[g,\ g_1]$是抛物元素，且以α为不动点。因$\{\alpha\}$不可能是G-不变的，故存在G的某个元素h不以α为不动点，从而$q=hph^{-1}$是抛物元素且不以α为不动点。因此q和g（或q和g_1）没有公共的不动点。故对于适当大的n，g和$q^n g q^{-n}$是没有公共不动点的斜驶元素，于是可应用情形（i）的结论。 □

定理5.1.4 设f（$\neq I$）是一个非二阶的Möbius变换，且以$\theta(g)=gfg^{-1}$定义映射θ：$\mathscr{M}\to\mathscr{M}$。若对某个$n$有$\theta^n(g)=f$，则$\langle f,\ g\rangle$是初等群且有$\theta^2(g)=f$。

［证］ 定义$g_0=g$，$g_n=\theta^n(g)$，从而对$m\geqslant 0$有

$$g_{m+1}=g_m f(g_m)^{-1}$$

先设f是抛物元素；不失一般性可设$f(z)=z+1$。因g_1，…，g_n共轭于f，故都是抛物元素，都只有一个不动点。对于$r\geqslant 0$，g_{r+1}以$g_r(\infty)$为不动点。因此若g_{r+1}以∞为不

动点，则 g_r 亦然。故由 $g_n(=f)$ 以 ∞ 为不动点可推出每个 g_j（包括 g_0）均以 ∞ 为不动点。这表明 $\langle f, g\rangle$ 是初等群，它的元素都以 ∞ 为不动点。且因 g_1 是以 ∞ 为不动点的抛物元素，故而与 f 可换，于是有 $g_2=f$。

再设 f 有两个不动点，不妨假定 $f(z)=kz$。显然，g_1，…，g_n 都有两个不动点。假设 g_{r+1} 以0和 ∞ 为不动点（就像 g_n 那样），则

$$\{0,\infty\}=\{g_r(0),g_r(\infty)\}$$

但 g_r 不可能使0和 ∞ 互换（$r\geqslant1$），否则 $(g_r)^2$ 以0和 ∞ 为不动点，且其它的点也是它的不动点，于是 g_r 是二阶的，从而 f（共轭于 g_r）也是二阶的。这推出当 g_{r+1} 以0和 ∞ 为不动点时，g_r 亦然（$r\geqslant1$）。故 g_1，…，g_n 都以0和 ∞ 为不动点。这表明 f 和 g 使集合 $\{0,\infty\}$ 保持不变，从而 $\langle f, g\rangle$ 为初等群。同样，因 g_1 与 f 可换故 $g_2=f$。 □

最后，希望读者能将这些结果同1.5节中的讨论联系起来。

习题 5.1

1. 设 G 是一个初等群且包含一个以 ∞ 为不动点的抛物元素。试证明：若所有这种抛物元素的群是循环群，则 G 内任何椭圆元素都是二阶的

2. 求证：当且仅当对 G 内所有的 f 和 g，$\langle f, g\rangle$ 初等时，群 G 初等。

3. 求证：若 g 和 h 是二阶元素，则 $\langle g, h\rangle$ 是初等群。$\langle g, h\rangle$ 必定离散吗？

4. 求证：映射

$$z \mapsto \left(\frac{z}{|z|}, \log|z|\right)$$

是具有度量 $\frac{|dz|}{|z|}$ 的穿孔平面 $C\setminus\{0\}$ 到具有欧氏度量的圆柱面 $S^1\times R^1$ 之间的一个等距映射，证明使 $\{0,\infty\}$ 保持不变的初等群同构于该圆柱面上的一个等距映射群。求出对应于这个群的元素 $z\mapsto az^p$ 的欧氏等距映射，其中 $p=1$ 或 -1。

5．设

$$f(z) = -z, \qquad g(z) = \frac{(1+t)z-(1+t)}{(1-t)z+(1-t)}$$

其中 $t=1/\sqrt{2}$。求证：g 是以某个点 $w\neq 0$ 为不动点的抛物元素。并由此推出 fgf^{-1} 是以 $-w$ 为不动点的抛物元素，从而 $\langle f, g\rangle$ 是非初等群。再证明依照定理5.1.4中的记号，无论如何都有 $\theta^2(g)=f$。（定理5.1.4中关于 f 不是二阶元素的假设条件是必要的）。

§5.2　具有一个不变圆盘的群

下面将研究 $\mathscr{M}$ 的具有不变圆盘的子群；这里先给出这类子群的特征。

定理5.2.1　设 G 是 $\mathscr{M}$ 的非初等子群，那么，当且仅当 G 没有严格斜驶元时，G-不变圆盘存在。若 D 是一个 G-不变开圆盘，则 D 和它的外部是仅有的两个 G-不变圆盘。

注：　我们不要求 G 是离散群。但限制 G 为非初等群则是必要的；例如，当

$$p(z)=z+1, \qquad q(z)=z+\mathrm{i}$$

时，$\langle p,q\rangle$ 既没有斜驶元素也没有不变圆盘，而 $\langle p\rangle$ 却有无限多个不变圆盘。

[证]　由定义4.3.3直接推出，若G-不变圆盘存在，则G没有严格斜驶元素。

为证其逆，设G为非初等群且无严格斜驶元素。由定理5.1.3,在G中可以找到两个不同的没有公共不动点的斜驶元素（且知为双曲元素）g和h。经共轭变换，可设g的不动点为0和∞。

选取G内任一元素f。利用矩阵可设其为

$$g=\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1/u \end{pmatrix},\quad f=\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

其中每个矩阵都属于$SL(2,C)$。由g是双曲元素，可知$\mathscr{M}$是实数。记

$$t_1=\operatorname{tr}(f)=\alpha+\delta$$

$$t_2=\operatorname{tr}(gf)=u\alpha+\frac{\delta}{u}$$

因f和gf不是严格斜驶元素，故t_1和t_2必是实数。解出α和δ，即知α和δ是实数。这表明G的每个元素其主对角线上的数都是实数。

再设

$$h=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\qquad ad-bc=1$$

则a和d是实数。因h是双曲元素，又有$(a+d)^2>4$。h的不动点为

$$w_1,w_2=\frac{(a-d)\pm[(a+d)^2-4]^{\frac{1}{2}}}{2c}$$

并且当$c \neq 0$时，比值w_1/w_2是实数。这表明g和h的不动点共线。以不变的形式表达，则无严格斜驶元素即意味着每对双曲元素g和h的不动点共圆。对此可以用几何的方法证明之，但上述的代数证明似乎更简单些。

不妨设g和h的不动点位于实轴上。于是g和h使H^2保持不变，并且h的矩阵中每个数都是实数。而

$$fh = \begin{pmatrix} \alpha a + \beta c & * \\ * & \gamma b + \delta d \end{pmatrix}$$

其主对角线上的元素是实数。因a，b，c，d，α和σ是实数且$bc \neq 0$，推出β和γ是实数，故f属于$SL(2, \mathbf{R})$。这表明G的每个元素都使H^2保持不变。

最后，设D是一个不变圆盘。对于G中任一双曲元素h，点$h^n(z)$凝聚于h的不动点（定理4.3.10），通过先取z为D内的点然后取z为D外部的点，即可看出所有的双曲不动点必位于D的边界上；于是恰好有两个G不变圆盘，其公共边界包含所有的双曲不动点（参看定理5.1.3）。 □

上述证明最后部分的论证表明：若g是具有不变圆盘D的抛物（或双曲）元素，则g的不动点位于∂D上。如果g是具有不变圆盘D的椭圆元素，那么g的不动点就不可能位于∂D上（考察$g(z) = e^{i\theta}z$便知）。若w是g的一个不动点，则w关于∂D的反演点也是不动点，因为反演点和∂D在g的变换下保持不变。因此，若g是具有不变圆盘D的椭圆元素，则g的两个不动点是关于∂D的反演点，且不位于∂D上。

习题 5.2

1. 通过取D为H^2来验证关于具有不变圆盘D的元素g的不动点

位置的断言，并证明g作为一个矩阵属于$SL(2,\mathbf{R})$。

§ 5.3 不连续群

先给出一个一般性的定义。

定义5.3.1 设X是任一拓扑空间，G是X到自身的同胚群。则当且仅当对X的每个紧子集K除G中有限个g外，均有

$$g(K)\cap K=\phi$$

我们就称G在X上的作用是不连续的。

在以后的应用中，我们常取$\hat{\mathbf{R}}^3$的具有通常拓扑的子集为X。从定义出发，即使是在最一般的情况下，也容易得出一些有用的结果。假定G在X上不连续，则下列命题成立。

G的每个子群在X上不连续； (5.3.1)

若ϕ是X到Y的同胚，则$\phi G\phi^{-1}$在Y上不连续； (5.3.2)

若Y是X的G-不变子集，则G在Y上不连续； (5.3.3)

若$x\in X$，$g_1, g_2, \cdots$，是G的不同元素，则序列$g_1(x)$，$g_2(x)$，$\cdots$不可能收敛于X中任何一点y； (5.3.4)

若$x\in X$，则稳定核G_x是有限集； (5.3.5)

若(例如)$X\subset\hat{\mathbf{R}}^3$，则$G$是可数的。 (5.3.6)

[证] (5.3.1)和(5.3.2)显然成立。若$Y\subset X$，则Y的任何紧子集也是X的紧子集，故(5.3.3)成立。要证明(5.3.4)只需注意到，如果所给的序列收敛于某点y，则

$$K=\{y,x,g_1(x),g_2(x),\cdots\}$$

是一个紧集。因$g_n(K)\cap K\neq\phi$ ($n=1,2,\cdots$) 并且 g_n是互不相同的，故G在X上不可能是不连续的；因而(5.3.4)成立。对于X中每一点x，$\{x\}$是紧集；故（5.3.5）是定义的直接推论。最后，由（5.3.5）和G/G_x与轨道$G(x)$之间存在的一一对应关系（4.3节），即知仅当$G(x)$可数时G可数。但因$\hat{R}^3$中任何一个不可数集必含有自身的一个极限点，故由（5.3.4），$G(x)$必定是可数的。这就证明了（5.3.6）。□

我们的目的是就$\mathscr{M}$的子群研究离散性与不连续性之间的关系。首先考虑G在H^3上的作用。

定理5.3.2 $\mathscr{M}$的子群G离散，当且仅当G在H^3上不连续。

［证］ 先假定G是离散群。由G是$SL(2,C)$的一个离散子群（因而是可数子群）的同态像，知G是可数的，设其为

$$G=\{g_1,g_2,\cdots\}$$

因G是离散群，$\|g_n\|\to+\infty$，故应用定理4.2.1即可推出$n\to+\infty$时有

$$\rho(j,g_n(j))\to+\infty \qquad (5.3.7)$$

从（3.3.5）知H^3的紧子集K位于某个双曲球

$$B=\{x\in H^3:\rho(x,j)<k\}$$

之中。若$g(K)\cap K\neq\phi$，则$g(B)\cap B\neq\phi$，从而

$$\rho(j,g(j))<2k$$

但由（5.3.7）知，这只对G中有限个g成立，因而G在H^3上不连续。

现在假定G在H^3上不连续（或在$\hat{C}$的任何一个子区域上不连续）。若G不是离散群，则可在$SL(2,C)$中找到互

不相同的矩阵$A_1, A_2, \cdots$对应于G中的$g_1, g_2, \cdots$使得当$n \to \infty$时$A_n \to I$。利用（4.1.4）即推出对$\hat{R}^3$中每一点x有$g_n(x) \to x$。这显然与（5.3.4）相违，从而推出G必定是离散的。□

现在我们把注意力转向扩充复平面，研究在$\hat{C}$的开子集上不连续性与离散性之间的关系。当然，从定理5.3.2的证明可以看出，若G在$\hat{C}$的某个非空开子集上不连续，则G是离散群。但逆命题不成立；可以找到离散群G，它在$\hat{C}$的任何开子集上都不是不连续的。为了给出这种子群的一个简单例子，我们先建立判定一子群不是不连续群的一个准则。

引理5.3.3 设G是$\mathscr{M}$的任一子群。若有$\hat{C}$的一个开子集D包含G的某个抛物或斜驶元素g的一个不动点v，则G在D上不是不连续的。

［证］ 结论是显而易见的：因为稳定核G_v包含由g经叠代而生成的元素，如果g是抛物或斜驶元素则G_v是无限集，这与（5.3.5）相违。□

例5.3.4 设G是Picard群，即形如

$$g(z) = \frac{az+b}{cz+d} \tag{5.3.8}$$

的变换组成的群，其中a, b, c, d是Gauss整数（即形如$m+in$的数，m，n是整数）并且$ad-bc=1$。G显然是离散群。

由引理5.3.3，只证明G的所有抛物不动点的集在$\hat{C}$稠密就足够了。令$w = \frac{1}{r}(p+iq)$，其中p，q，r都是整数；显然，这种w的集在$\hat{C}$稠密。而我们容易看出

$$h(z)=\frac{(1-\bar{w}r^2)z+r^2w^2}{-r^2z+(1+\overline{wr^2})}$$

是G内以w为不动点的抛物元素。 □

我们的目的是研究在什么情况下一个离散子群在$\hat{C}$的某个开子集上的作用不连续。若只限于考虑非初等群，对此问题的阐述则将更为清晰；初等群的情形是相当容易的，我们把它留给读者去讨论。应当指出的是，我们仍然不是在一开始就假定所讨论的子群离散。

我们在考察斜驶元素的不动点的基础上进行讨论；先证明一个予备性结果，它使我们能够确定这类不动点的位置。

引理5.3.5 设Σ是一个开圆盘，假定$g\in\mathscr{M}$并且$g(\overline{\Sigma})\subset\Sigma$。则$g$是斜驶元素并且在$g(\overline{\Sigma})$内有一个不动点。

〔证〕 不妨设$g(\infty)=\infty$。在此假设下，$\partial\Sigma$是一个欧氏圆周（而不是直线），显然在Σ的边界上没有g的不动点。若g是椭圆（或抛物）元素，则必为欧氏等距变换，而这同$g(\overline{\Sigma})\subset\Sigma$是不相容的。因而$g$是斜驶元素。对于$g$的任意一个非不动点$w$，象点序列$g^n(w)$，$n=1, 2, \cdots$凝聚于$g$的一个不动点$v$。当$w\in\Sigma$时，这些象点都位于$g(\overline{\Sigma})$内，从而$v\in g(\overline{\Sigma})$。 □

现在着手研究在$\hat{C}$的子集上的不连续性。

定义5.3.6 设G是$\mathscr{M}$的一个非初等子群（不必离散），以Λ_0表示G中斜驶元素的不动点的集合。称Λ_0在$\hat{C}$中的闭包$\Lambda(G)$为G的**极限集**，称$\Lambda(G)$的余集$\Omega(G)$为G的**寻常集**。

通常我们简写为Λ和Ω，不提及G。顺便指出，若$G\subset G_1$，则

$$\Lambda(G)\subset\Lambda(G_1),\ \Omega(G)\supset\Omega(G_1)$$

我们先研究Λ，然后研究Ω。

定理5.3.7 对于任何一个非初等群G，其极限集Λ是$\hat{C}$的最小非空G-不变闭子集，并且是一个完全集，因而也是一个不可数集。

〔证〕 因Λ_0是G-不变的，故Λ也是G-不变的。根据定义知Λ是闭集，由定理5.1.2有$\Lambda\neq\phi$。设E是$\hat{C}$的任意一个非空G-不变闭子集。因G是非初等群，每条轨道都是无限的，故E是无限集。任取G中一个斜驶元素g的不动点v，在E中存在g的非不动点w，集合$\{g^n(w):n\in Z\}$凝聚于v（及g的另一不动点）。因E是闭集，故$v\in E$。这表明$\Lambda_0\subset E$，于是$\Lambda\subset E$。

这一论证同时也表明Λ_0没有孤立点（可取w属于Λ_0但非g的不动点），从而Λ没有孤立点。没有孤立点的闭集为完全集，已知任何非空完全集为不可数集。故Λ是完全集，定理证毕。 □

定理5.3.7表明可数集Λ_0在不可数集Λ中稠密。事实上，还有如下更强的结论。

定理5.3.8 设G是$\mathscr{M}$的非初等子群，O_1和O_2是互不相交的开集，但都与Λ相交。则必存在G中某斜驶元素g，它的一个不动点属于O_1，另一个不动点属于O_2。

〔证〕 已知若f是以α为吸收型不动点、β为排斥型不动点的斜驶元素，则当$n\to+\infty$时，$f^n\to\alpha$在$\hat{C}\setminus\{\beta\}$的每个紧子集上为一致收敛，$f^{-n}\to\beta$在$\hat{C}\setminus\{\alpha\}$的每个紧子集上为一致收敛（定理4.3.10）。$f$的排斥型不动点正是$f^{-1}$的吸收型不动点。

现在考虑定理所设的G，O_1和O_2。由定义5.3.6推出存

在一个斜驶元素p，其吸收型不动点属于O_1，且还存在另一个斜驶元素q，其吸收型不动点属于O_2。由定理5.1.3，存在斜驶元素f以α为吸收型不动点，以β为排斥型不动点，并且这两个点都不是p的不动点。选定某个充分大的m，使得元素

$$g = p^m f p^{-m}$$

的吸收型不动点α_1 $(=p^m\alpha)$ 和排斥型不动点β_1 $(=p^m\beta)$ 属于O_1。然后选取充分大的r使得

$$h = q^r$$

把α_1映入O_2；记$\alpha_2 = h(\alpha_1)$ 。参看图5.3.1.

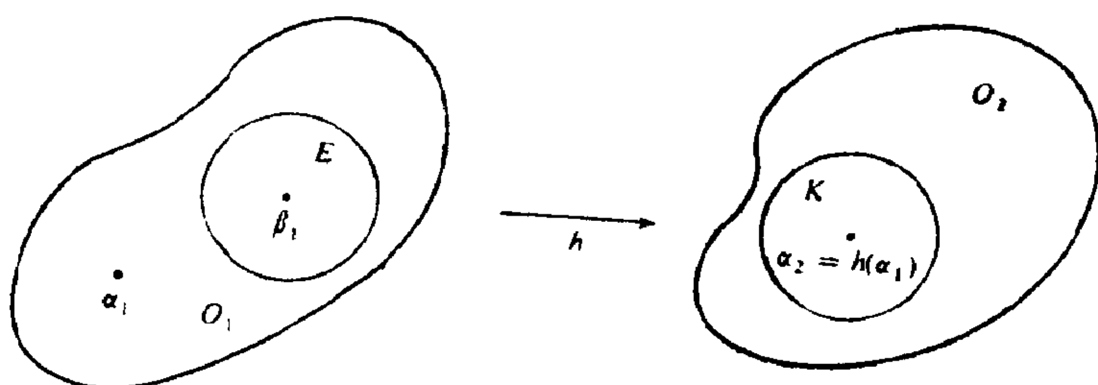


图 5.3.1

其次，构造开圆盘E和K满足

$$\beta_1 \in E \subset \overline{E} \subset O_1$$
$$\alpha_2 \in K \subset \overline{K} \subset O_2$$

因$\beta_1 \notin \overline{K}$，所以当$n \to +\infty$时$g^n \to \alpha_1$在$\overline{K}$上为一致收敛。由于$h^{-1}(K)$是$\alpha_1$的一个开邻域，故对于所有充分大的$n$有

$$g^n(\overline{K}) \subset h^{-1}(K)$$

从而

$$hg^n(\bar{K})\subset K \qquad (5.3.9)$$

因 $h(\alpha_1)\notin\bar{E}$，故α_1不属于$h^{-1}(\bar{E})$，从而当$n\to+\infty$时$g^{-n}\to\beta_1$在$h^{-1}(\bar{E})$为一致收敛。于是对所有充分大的n有

$$g^{-n}h^{-1}(\bar{E})\subset E \qquad (5.3.10)$$

选取n使（5.3.9）和（5.3.10）同时成立。由引理5.3.5，hg^n是斜驶元素，它的一个不动点属于K；同样，$g^{-n}h^{-1}$即$(hg^n)^{-1}$有一个不动点属于E，故hg^n有一不动点属于E。□

定理5.3.7和5.3.8都不要求G是离散群。如果增添上G是离散群的假设条件，就可通过任何一条轨道来描述Λ。对于$\hat{C}$中每一点z，以$\Lambda(z)$表示具有下述性质的点w的集，即存在G中不同元素g_n使得$g_n(z)\to w$（点$g_n(z)$不必互不相同）。

定理5.3.9 若G是$\mathscr{M}$的非初等离散子群，则对于$\hat{C}$中所有的z均有$\Lambda=\Lambda(z)$。

注：由$z\mapsto 2z$生成的群表明，如果只假定G是离散群，定理的结论就可能不成立。使单位圆盘保持不变的Möbius变换群表明，如果只假定G是非初等群，定理的结论也可能不成立。

〔定理5.3.9的证明〕 因每个$\Lambda(z)$都是闭的，非空的，G不变的，故由定理5.3.7有

$$\Lambda\subset\Lambda(z)$$

若$z\in\Lambda$，则$G(z)\subset\Lambda$，因此

$$\Lambda(z)\subset\overline{G(z)}\subset\Lambda$$

于是在这种情况下有$\Lambda=\Lambda(z)$。

现在假定z属于Ω，取$\Lambda(z)$中任意一点w，要证$w\in\Lambda$。

若不然，则$w\in\Omega$并且存在以w为圆心的圆盘Q使得$\overline{Q}$包含于Ω。不妨设0和∞属于Λ，故取$K=\overline{Q}\cup\{z\}$即可从定理4.5.5推出对G中所有的g和$\overline{Q}$中所有的z'有

$$d(gz,gz')\leqslant\frac{m}{\|g\|^2}$$

因$w\in\Lambda(z)$，故存在互不相同的g_n使$g_n(z)\to w$；由$\|g_n\|^2\to+\infty$，推出$g_n\to w$在$\overline{Q}$上为一致收敛。这意味着对充分大的n有

$$g_n(\overline{Q})\subset Q$$

从而由引理5.3.5有$Q\cap\Lambda\neq\phi$，这与$Q\subset\Omega$相矛盾。 □

现在我们把注意力转向开集Ω。

定理5.3.10 设G是$\mathscr{M}$的离散非初等子群。则Ω是G在$\hat{C}$内的最大不连续性区域；即是说

(i) G在Ω上不连续；

(ii) 若G在$\hat{C}$的开子集D上不连续，则有$D\subset\Omega$。

注：按照传统的说法，一个离散群G被称为Klein群，是指有$\Omega\neq\phi$。按照较新的说法，Klein群已成为离散群的同义语。

〔证〕 若G在Ω上并非不连续，则存在Ω的紧子集K及G内互不相同的元素g_1，g_2，…使得$g_n(K)\cap K\neq\phi$。于是存在K中的点$z_1,z_2,\cdots$满足$g_n(z_n)\in K$。通过取子列，不妨设$g_n(z_n)\to w\in K$，故$w\in\Omega$。完全仿照定理5.3.9的证明可推出$g_n\to w$在K上一致收敛，因而$w\in\Lambda$，矛盾。这证明了（i）。

（ii）的证明是容易的。由引理5.3.3有$D\cap\Lambda_0=\phi$。因D是开集，这意味着$D\cap\Lambda=\phi$，故$D\subset\Omega$。 □

定理5.3.10有一个有趣的推论。

推论 设G是离散的非初等群。则当且仅当对于某个z, $G(z)$在$\hat{C}$中不稠密时，$\Omega\neq\phi$。

〔证〕 由定理5.3.9，当且仅当$\Lambda(z)(=\Lambda)$不等于$\hat{C}$时，$\Omega\neq\phi$而这就是推论的结论。 □

引理5.3.3表明G的抛物和斜驶元素的不动点属于Λ，因而不属于Ω。不难看出，可能存在G的椭圆元素，其不动点既有属于Λ的也有属于Ω的。如果一个椭圆不动点属于Ω。那么这个点的稳定核必是循环群。

定理5.3.11 若G是离散的非初等群并且$\Omega\neq\phi$。则对$z\in\Omega$，稳定核G_z是有限循环群。

〔证〕 由引理5.3.3，若$z\in\Omega$，则稳定核G_z的每个元素或者是椭圆元素或者是I。于是由定理4.3.7知在H^3中存在某点ζ是G_z中每个g的不动点。用A表示H^3中以z为端点，过点ζ，且与$\hat{C}$正交的那条唯一确定的半圆周。G_z内每个椭圆元素都以z和ζ为不动点，故都以A为轴。这就意味着G_z的每个元素都以A的两个端点为不动点，5.1节中所列的检验离散初等群的方法表明G_z必是有限循环群。

还可给出另一种证明。设g和h以Ω中的点z为不动点。因g和h是椭圆元素，各自还有另一个不动点；如果这两个点不相同，则由定理4.3.5即推出〔g, h〕是抛物元素且以z为其不动点。这与引理5.3.3相悖。 □

利用定理5.3.11我们还可得到有关离散群G在H^3或Ω内一点z邻近的性态的结果。

定理5.3.12 若G是$\mathscr{M}$的离散非初等子群。则对G中的g有

(i) H^3中每一点x必是一个双曲开球N的中心，使得当$g(x)=x$时$g(N)=N$，否则$g(N)\cap N=\phi$；

(ii) 若$\Omega\neq\phi$，则Ω中每一点z必有一个开邻域N包含于Ω，使得当$g(z)=z$时$g(N)=N$，否则$g(N)\cap N=\phi$。

［证］ 首先，由G是H^3中不连续等距映射群的事实直接推出（i）。

为证明（ii），不妨设$z=0$并且G_z中的每个g也以∞为不动点（此处用到定理5.3.11）。选取一个圆盘

$$N=\{z:|z|<r\}$$

使其闭包包含于Ω。因G在Ω中不连续，故只对G中有限个g有$g(N)\supset N\neq\phi$。由Möbius变换的连续性，对于充分小的r（依赖于这有限个g）有$g(N)\cap N=\phi$；除$g(0)=0$的情形外，此时有$g(N)=N$。 □

若G是离散群，则可令$G=\{g_1, g_2,\cdots\}$，且有

$$\|g_n\|\to+\infty, \quad n\to+\infty$$

我们证明这一收敛过程不会太慢。

定理5.3.13 设G是$\mathscr{M}$的离散子群，则

(i) G内满足$\|g\|\leqslant t$的元素g的数目$n(t)=0(t^4)$；

(ii) 对于任何$s>4$，级数$\sum\|g\|^{-s}$收敛；

(iii) 若$\Omega\neq\phi$，则级数$\sum\|g\|^{-4}$收敛。

［证］ H^3中j的稳定核G_j是有限集，假定有k个元素。设N是H^3中以j为中心半径为r的双曲球，满足$g(N)\cap N=\phi$，其中$g\in G\backslash G_j$。以$V(R)$表示半径为R的双曲球的双曲体积。

由定理4.2.1，$\|g\|\leqslant t$等价于

$$2\cosh\rho(\mathrm{j},g\mathrm{j})\leqslant t^2$$

故若$\|g\|\leqslant t$，则

$$g(N)\subset\{x\in H^3:\rho(x,\mathrm{j})\leqslant r+\cosh^{-1}(\frac{1}{2}t^2)\}$$

把N的那些互不相交的像$g(N)$（$\|g\|\leqslant t$）的体积加起来，并考虑到j的稳定核的阶，便得到

$$\frac{n(t)}{k}\leqslant V(r+\cosh^{-1}(\frac{1}{2}t^2)) \tag{5.3.11}$$

又因

$$V(R)=\pi[\sinh(2R)-2R]$$

$$<\frac{1}{2}\pi e^{2R}$$

（参看〔5〕，61页）而

$$\cosh^{-1}(y)=\log[y+(y^2-1)^{\frac{1}{2}}]$$
$$<\log(2y)$$

故有

$$n(t)\leqslant k\cdot\frac{\pi}{2}\exp[2r+2\log(t^2)]$$

$$=\frac{1}{2}k\pi e^{2r}t^4$$

为证明（ii），注意到$n(1)=0$，故有

$$\sum_{g\in G,\|g\|\leqslant t}\|g\|^{-s}=\int_1^t\frac{\mathrm{d}n(x)}{x^s}$$

$$=\frac{n(t)}{t^s}+s\int_1^t\frac{n(x)\mathrm{d}x}{x^{s+1}} \tag{5.3.12}$$

因而（i）蕴含（ii）。顺便指出，这推出

$$\sum_{\|g\| \leq t} \|g\|^{-4} = O(\log t).$$

并且实际上还可得到当s为任何正数时部份和(5.3.12)的一个估计。

为证明(iii)，我们可采用类似的论证方法；不过是在Ω内讨论并采取通弦度量。在Ω内存在开圆盘N，使得对于G内所有的$g(g \neq I)$，有$g(N) \cap N = \phi$。诸$g(N)$的面积之和（指通弦度量下的面积）是收敛的，并且至多是4π（$\hat{C}$的通弦度量面积）。我们只需估计$g(N)$的面积。设

$$g(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \qquad ad-bc=1$$

则$g(N)$的通弦面积为

$$\iint_{g(N)} \frac{4\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(1+|z|^2)^2} = 4\iint_N \frac{|g^{(1)}(z)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(1+|g(z)|^2)^2}$$

$$= 4\iint_N \frac{4\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(|az+b|^2+|cz+d|^2)^2}$$

$$\geqslant \|g\|^{-4} \text{（}N\text{的通弦面积）}$$

最后一行用到了*Cauchy-Schwarz*不等式，即

$$|az+b|^2 + |cz+d|^2 \leqslant (|a|^2+|b|^2)(1+|z|^2) + (|c|^2+|d|^2)(1+|z|^2)$$ □

我们在结束本节之前再建立两个结果，这些结果都蕴含$\Omega \neq \phi$。

定理5.3.14 设G是$\mathscr{M}$的离散非初等子群。

(i) 若D是非空的G-不变开集并且不等于$\hat{C}$，则G在D上不连续；

(ii) 若D是一个非空开集使得对于除I外G内所有的g有$g(D)\cap D=\phi$，则G在$\bigcap_{g\in G} g(D)$内不连续。

［证］ 集$E=\hat{C}\setminus D$是非空的G-不变闭集，故由定理5.3.7有$\Lambda\subset E$。于是G在D上不连续（定理5.3.10）。

由定义，$\cup g(D)$是不连通的，因而不等于$\hat{C}$；故可应用(i)于$\cup g(D)$。 □

据上述定理中的(ii)，如果只要$g\in G(g\neq I)$就有$g(D)\cap D=\phi$，则我们称$\hat{C}$的子域D是一个G-垫。这一术语使得下一个结果的叙述较为简便。

定理5.3.15 设$G_1, G_2, \cdots$是$\mathscr{M}$的子群，它们的并生成群G。设D_j是一个G_j-垫并假定当$i\neq j$时$D_i\cup D_j=\hat{C}$。还假定D^* $(=\bigcap D_j)$非空。则G是诸G_j的自由乘积，D^*是一个G-垫，并且G在$\bigcup_{g\in G} g(D^*)$上不连续。

［证］ 考虑G的任何元素$g_n\cdots g_1$，其中$g_k\in G_{i_k}, g_k\neq I$，并且对任何$k$都有$i_k\neq i_{k+1}$。首先，因$D_{i_1}$是$G_{i_1}$-垫，故有

$$g_1(D^*)\subset g_1(D_{i_1})\subset \hat{C}\setminus D_{i_1}$$

事实上，由归纳法即可推出

$$g_m\cdots g_1(D^*)\subset \hat{C}\setminus D_{i_m}$$

因为若此式成立则有

$$\begin{aligned} g_{m+1}(g_m\cdots g_1)(D^*) &\subset g_{m+1}(\hat{C}\setminus D_{i_m}) \\ &\subset g_{m+1}(D_{i_{m+1}}) \\ &\subset \hat{C}\setminus D_{i_{m+1}} \end{aligned}$$

由此即得

$$g_m\cdots g_1(D^*)\subset \hat{C}\setminus D_{i_m}\subset \hat{C}\setminus D^*$$

故D^*是一个G-垫。因$D^*\neq\phi$，故必有$g_m\cdots g_1\neq I$，从而G

是诸G_j的自由乘积。最后的结论可从定理5.3.14(ii)推出。 □

作为定理5.3.15的应用考虑$G_1=\langle g\rangle$，$G_2=\langle h\rangle$，其中

$$g(z)=z+b\ ,\qquad h(z)=\frac{z}{z+1}.$$

令
$$D_1=\{x+iy:|x|<3\}$$
$$D_2=\{z:|z+1|>1\}\cap\{z:|z-1|>1\}$$

参看图5.3.2。

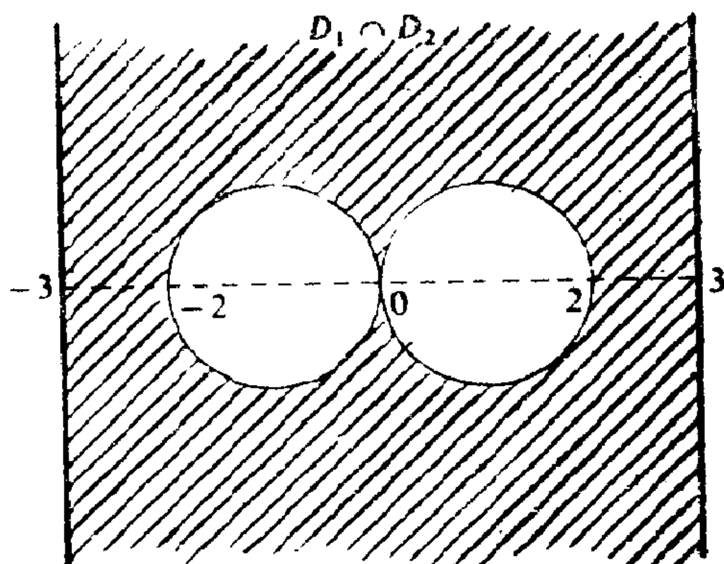


图 5.3.2

显然，D_1是G_1-垫；因为h把区域$|z+1|>1$映射为圆盘$|z-1|<1$，故D_2是G_2-垫。容易看出$D^*\neq\phi$且$D_1\cup D_2=\hat{C}$，从而可以应用定理5.3.15。

习题 5.3

1. 验证定理5.3.9后面的附注。

2. 设g和Σ如引理5.3.5之所设。试证对于某个w有

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} g^n(\overline{\Sigma}) = \{ w \}$$

并且w是g在Σ中唯一的不动点。

3. 假定G是离散非初等群。试证Ω是$\widehat{C}$中使得G为正规族的那些区域中的最大区域。

4. 假定G是含有抛物元素的非初等群。试证Λ也是G的抛物不动点集合的闭包。

5. 设G_j，D_j和D^*如定理5.3.15应用中之所设，令$G = \langle g, h \rangle$．求证$\Lambda \subset R^1 \cup \{ \infty \}$，由此推出$G$在上半平面和下半平面都不连续并证明$\Omega$是连通集。

设D是从D^*的闭包中去掉原点所得的集。求证$D \subset \Omega$，并有

$$\bigcup_{f \in G} f(D) = \Omega$$

6. 设Q_1, Q_{-1}, Q_2, Q_{-2}是C中彼此互外的四个圆周。对于$j = 1, 2$，设g_j把Q_{-j}的外部映射成Q_j的内部。求证$G = \langle g_1, g_2 \rangle$在

$$\bigcup_{g \in G} g(\overline{D})$$

上不连续，其中D是位于四个圆周的外部的区域。这样的群称为两个生成元的$Schottky$群。

§ 5.4 Jorgensen不等式

在结束对离散性与不连续性的一般性讨论之前，我们来介绍$Jorgensen$不等式。以后，我们将就双曲平面的等距映射的特殊情形给出更详尽的几何解释。

设A和B是$SL(2, C)$中分别对应于$Möbius$变换f和g的矩阵。由于在相差因子-1的范围内A和B由f和g所确定，因而换位子$ABA^{-1}B^{-1}$由f和g唯一确定。于是有

$$\mathrm{tr}(fgf^{-1}g^{-1}) = \mathrm{tr}(ABA^{-1}B^{-1})$$

定理5.4.1 （Jorgensen不等式） 假定Möbius变换f和g生成一个离散非初等群。则

$$|\mathrm{tr}^2(f) - 4| + |\mathrm{tr}(fgf^{-1}g^{-1}) - 2| \geqslant 1 \qquad (5.4.1)$$

并且这个下界是最佳的。

因为当$\langle f, g\rangle$是离散非初等群时有

$$|\mathrm{tr}^2(A) - 4| + |\mathrm{tr}(ABA^{-1}B^{-1}) - 2| \geqslant 1 \qquad (5.4.2)$$

故A和B不能同时接近于I。从而，式(5.4.1)是关于离散群中恒等元素I的孤立性的一个定量描述，也可以用$SL(2,C)$中的度量来表达。

为便于求得明确的数量界限，令

$$A = I + X, \qquad A^{-1} = I + X^*$$

则有

$$\| X \| = \| X^* \|, \qquad X + X^* + XX^* = 0$$

对于$B = I + Y$有类似的表达式。由 Cauchy-Schwarz 不等式推出

$$|\mathrm{tr}(X)| \leqslant \sqrt{2}\, \| X \|$$

具体计算表明$[A,B] - I$可化为六项之和，其每一项是X，X^*，Y和Y^*中至少两个矩阵的乘积。若$\| X \| < \varepsilon$，$\| Y \| < \varepsilon$，则由（5.4.2）推出

$$1 \leqslant \sqrt{2}\,\varepsilon(4 + \sqrt{2}\,\varepsilon) + 6\varepsilon^2$$
$$= 4\sqrt{2}\,\varepsilon + 8\varepsilon^2$$

故$\varepsilon > 0.146$。于是有如下粗略而明确的估计式。

推论 若A和B生成离散非初等群，则

$$\max\{\| A - I \|, \| B - I \|\} > 0.146$$

为证明（5.4.1）式中的下界是最佳的，考虑由

$$f(z)=z+1, \qquad g(z)=-\frac{1}{z}$$

生成的群。此时，G是$SL(2,C)$中的模群，它显然是非初等的并且(5.4.1)式的等号成立。

〔定理5.4.1的证明〕 证明的思想包含在1.5节和定理5.1.4中。已知$\langle f, g\rangle$是离散非初等群。若f是二阶元素，则(5.4.1)式成立(因$\mathrm{tr}^2(f)=0$)；因而可假定f不是二阶元素。在$SL(2,C)$中选取对应于f和g的矩阵A和B，并定义

$$B_0=B, \qquad B_{n+1}=B_nAB_n^{-1} \qquad (5.4.3)$$

这推出B_n对应于如定理5.1.4证明中所确定的g_n，因而(由该定理)对任何n都有$B_n\neq A$。剩下只需证明若(5.4.2)不成立，则对某个n有

$$B_n=A \qquad (5.4.4)$$

我们考虑两种情形。

情形1 f是**抛物元素**。

因迹在共轭变换下不变，故不妨假设

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$$

其中$c\neq 0$（否则$\langle A, B\rangle$是初等群）。因假定（5.4.2）不成立即是假定

$$|c|<1$$

关系式（5.4.3）意味着

$$\begin{pmatrix}a_{n+1} & b_{n+1}\\ c_{n+1} & d_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-a_nc_n & a_n^2\\ -c_n^2 & 1+a_nc_n\end{pmatrix}$$

由此用归纳法推出

$$c_n = -(-c)^{2n}$$

（除$n=0$外其值为$-c^{2^n}$）；而因$|c|<1$，故有

$$c_n \to 0$$

采用归纳法，由$|c_n|<1$得

$$|a_n| \leqslant n + |a_0|$$

故$a_n c_n \to 0$并且

$$a_{n+1} \to 1$$

这就证明了

$$B_{n+1} \to A$$

而由离散性知（5.4.4）式对所有充分大的n都成立。

情形2 f是斜驶元素或椭圆元素。

不失一般性，可设

$$A = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1/u \end{pmatrix}$$

B如情形1中所设且$bc \neq 0$（否则$\langle A, B\rangle$为初等群）．假定（5.4.2）不成立，即有

$$\begin{aligned} \mu &= |\mathrm{tr}^2(A) - 4| + |\mathrm{tr}(ABA^{-1}B^{-1}) - 2| \\ &= (1 + |bc|)\left|u - \frac{1}{u}\right|^2 \\ &< 1 \end{aligned}$$

关系式（5.4.3）意味着

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \\ c_{n+1} & d_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n d_n u - \dfrac{b_n c_n}{u} & a_n b_n\left(\dfrac{1}{u} - u\right) \\ c_n d_n\left(u - \dfrac{1}{u}\right) & \dfrac{a_n d_n}{u} - b_n c_n u \end{pmatrix}$$

故有

$$b_{n+1}c_{n+1} = -b_nc_n(1+b_nc_n)\left(u-\frac{1}{u}\right)^2$$

由归纳法得

$$|b_nc_n| \leqslant \mu^n |bc| \leqslant |bc|$$

从而

$$b_nc_n \to 0$$

且

$$a_nd_n = 1 + b_nc_n \to 1$$

同时，还得出

$$a_{n+1} \to u, \quad d_{n+1} \to \frac{1}{u}$$

由于

$$\frac{|b_{n+1}|}{|b_n|} = \left|a_n\left(\frac{1}{u} - u\right)\right|$$

$$\to \left|u\left(\frac{1}{u} - u\right)\right|$$

$$\leqslant \mu^{\frac{1}{2}} |u|$$

因而对所有充分大的n有

$$\left|\frac{b_{n+1}}{u^{n+1}}\right| < \left(\frac{1+\mu^{\frac{1}{2}}}{2}\right)\left|\frac{b_n}{u^n}\right|$$

于是

$$\frac{b_n}{u^n} \to 0$$

类似地有$c_n u^n \to 0$，这就推出

$$A^{-n}B_{2n}A^n = \begin{pmatrix} a_{2n} & b_{2n}u^{-2n} \\ u^{2n}c_{2n} & d_{2n} \end{pmatrix} \to A$$

因$\langle A, B\rangle$是离散群，故对所有充分大的n必有

$$A^{-n}B_{2n}A^n = A$$

从而对这些n有$B_{2n} = A$，这就是（5.4.4）式。 □

在结束本章之前，我们来介绍Jorgensen不等式的几种应用。

定理5.4.2 Möbius变换的非初等群G是离散群，当且仅当对G中的每个f和g，群$\langle f, g\rangle$是离散的。

〔证〕 若G是离散群，那么G的每个子群也是离散群。现在假定每个子群$\langle f, g\rangle$是离散群；我们再假设G不是离散群然后推出矛盾的结果。

因G不是离散群，故在G中可以找到一列互不相同的元素$f_1, f_2, \cdots (\neq I)$，使得它们在$SL(2, \mathbb{C})$中的对应矩阵$A_1$，$A_2, \cdots$收敛于$I$。通过考虑矩阵的迹，我们不妨设没有一个$f_n$是二阶元素。

对于G中任一具有对应矩阵B的元素g，有

$$|\mathrm{tr}^2(A_n) - 4| + |\mathrm{tr}[A_n, B] - 2| \to 0$$

故由定理5.4.1，对于$n \geq n(g)$，群$\langle f_n, g\rangle$是初等的。

G必含有没有公共不动点的两个斜驶元素g和h（定理5.1.3）．对于大于$n(g)$和$n(h)$的n，群

$$\langle g, f_n\rangle, \qquad \langle h, f_n\rangle$$

都是离散初等群，根据5.1节中对这类群的讨论，知f_n必使g和h的两对不动点保持不变。因f_n不是二阶椭圆元素，它不能

使一对点互换，因而f必使g和h的每个不动点保持不变。这意味着g和h有公共不动点，与所设矛盾。 □

其次，在f是抛物元素的特殊情况下我们给出（5.4.1）的一些替代形式（ρ是H^3中的双曲度量）。

定理5.4.3 若f是抛物元素，假定$\langle f, g\rangle$是离散非初等群．则

(i) $$\|f-I\|\cdot\|g-I\|\geq 1$$

并且这是最佳估计；

(ii) 若g也是抛物元素，则对H^3中所有的点x，有

$$\sinh\frac{1}{2}\rho(x,fx)\sinh\frac{1}{2}\rho(x,gx)\geq\frac{1}{4}$$

并且这也是最佳估计。

注： 在(i)中，$\|f-I\|$可用$\|A-I\|$表达，A是f所对应的任一矩阵，类似的替换对g也同样适用。

［证］ 存在一个对应于酉矩阵U的$M\ddot{o}bius$变换h，使得hfh^{-1}以∞为不动点。若A是f所对应的矩阵，则

$$\|UAU^{-1}-I\|=\|A-I\|$$

对g也作类似的处理。故可设f以∞为不动点，于是有

$$A=\begin{pmatrix}\varepsilon & \lambda\\ 0 & \varepsilon\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\qquad (ad-bc=1)$$

其中$\varepsilon^2=1$，B是g所对应的矩阵。$Jorgensen$不等式（5.4.2）表明

$$|c\lambda|\geq 1$$

从而由

$$\|A-I\|\geq|\lambda|,\qquad \|B-I\|\geq|c|$$

即推出（i）。

为证明（ii），选取f和g所对应的矩阵A和B，使得

$$\mathrm{tr}(A)=\mathrm{tr}(B)=2$$

应用定理4.2.1即有

$$\begin{aligned}\|A-I\|^2&=\|A\|^2+2-2\mathrm{Re}[\mathrm{tr}(A)]\\&=\|A\|^2-2\\&=4\sinh^2\frac{1}{2}\rho(\mathrm{j},g\mathrm{j})\end{aligned}$$

其中j＝（0,0,1）是H^3中的点。这表明当$x=\mathrm{j}$时（ii）成立。

容易推出在一般情况下(ii)也成立。若$x\in H^3$，选取$Möbius$变换h把x映射为j。分别以hfh^{-1}，hgh^{-1}，j代替f，g，x再应用（ii），即可推出（ii）的一般形式。

考虑映射$f: z\mapsto z+1$，$g: z\mapsto \dfrac{z}{z+1}$，即知两个下界都是最佳的。 □

定理5.4.3有一个有趣的几何解释。H^3中的极限球Σ是H^3中与$\hat{C}$相切的欧几里德开球。若切点是w，则称Σ基于w点；Σ在R^3中的边界$\partial\Sigma$是一个极限球面。基于∞的极限球如

$$\{(x_1,x_2,x_3)\in H^3: x_3>k\}$$

其中$k>0$。于是在这种情形下（因而在一般情形），一个极限球面就是H^3中与所有包含点w的双曲平面正交的曲面，w是∞点的球面（即$\hat{C}$）上的一个点。这便是完全用H^3中的几何学对极限球和极限球面所作的刻画。

若g是$\mathscr{M}$的一个以w为不动点的抛物元素，则对于所有的正数k，集合

$$\Sigma[g,k]=\{x\in H^3:\sinh\frac{1}{2}\rho(x,gx)<k\}$$

是基于w点的极限球。事实上，若$g(z)=z+1$，应用(3.3.4)式即得

$$\sinh\frac{1}{2}\rho(x,gx)=\frac{1}{2x_3}$$

因而

$$\Sigma[g,k]=\{x\in H^3:x_3>\frac{1}{2k}\}$$

由于对所有的Möbius变换h均有

$$h(\Sigma[g,k])=\Sigma[hgh^{-1},k]$$

故对一般的g结论也成立。

对每个抛物元素g，我们定义极限球

$$\Sigma_g=\{x\in H^3:\sinh\frac{1}{2}\rho(x,gx)<\frac{1}{2}\}\qquad(5.4.5)$$

显然，对任何Möbius变换h都有

$$h(\Sigma_g)=\Sigma_{hgh^{-1}}\qquad(5.4.6)$$

由定理5.4.3 (ii)，若Σ_g和Σ_h相交，则$\langle g,h\rangle$显然不可能既是离散群又是非初等群.特别，若已知g和h是一个离散群中的元素，则g和h必有公共不动点.这就证明了如下的结果。

定理5.4.4 设G是$\mathscr{M}$的离散非初等子群，且含有抛物元素。对于G中每个抛物元素g，设Σ_g是由(5.4.5)式定义的极限球.则极限球族

$$\{\Sigma_g:\ g\text{是}G\text{中抛物元素}\}$$

按照(5.4.6)式为G所置换，并且除g和h有一公共不动点外

必有$\Sigma_g \cap \Sigma_h = \phi$。

*Jorgensen*不等式的最后一个应用是关于非抛物元素的类似于定理5.4.3（ii）的结果；为了完整起见，我们把关于抛物元素的结果也写入如下的定理中。

定理5.4.5 设$\langle g, h\rangle$是离散非初等群。

（i） 若g是抛物元素，则对H^3中所有的点x有

$$\sinh\frac{1}{2}\rho(x,gx)\sinh\frac{1}{2}\rho(x,hgh^{-1}x)\geqslant\frac{1}{4}$$

（ii） 若g是双曲元素，则对H^3中所有的点x有

$$\sinh\frac{1}{2}\rho(x,gx)\sinh\frac{1}{2}\rho(x,hgh^{-1}x)\geqslant\frac{1}{8}$$

（iii） 若g是椭圆元素或严格斜驶元素，并且$|\mathrm{tr}^2(g)-4|<1/4$（此式确定了I的一个开邻域），则对H^3中所有的点x有

$$\max\{\sinh\frac{1}{2}\rho(x,gx),\sinh\frac{1}{2}\rho(x,hgh^{-1}x)\}\geqslant\frac{1}{4}$$

如果

$$\rho(x,gx)<\varepsilon\ ,\qquad \rho(x,hx)<\varepsilon$$

那么

$$\begin{aligned}\rho(x,hgh^{-1}x)&=\rho(h^{-1}x,gh^{-1}x)\\&\leqslant\rho(h^{-1}x,x)+\rho(x,gx)+\rho(gx,gh^{-1}x)\\&<3\varepsilon\end{aligned}$$

这样我们就得到了定理5.4.5的如下推论。

推论5.4.6 设N是$\mathscr{M}$中由集合$\{f:|\mathrm{tr}^2(g)-4|<1/4\}$

所确定的I的一个开邻域。若g属于N且$\langle g, h\rangle$是离散非初等群，则对H^3中所有的点x有

$$\max\{\rho(x,gx),\rho(x,hx)\}\geqslant 0.38\cdots$$

定理5.4.5的证明需要用到斜驶元素和椭圆元素的几何性质。先设

$$g=\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & \frac{1}{u}\end{pmatrix},\qquad u=|u|e^{i\theta} \tag{5.4.7}$$

是斜驶(包括双曲)元素（或椭圆元素）。显然有

$$\left|u-\frac{1}{u}\right|^2=\left(u-\frac{1}{u}\right)\left(\bar{u}-\frac{1}{\bar{u}}\right)$$

$$=\left(|u|-\frac{1}{|u|}\right)^2+4\sin^2\theta \tag{5.4.8}$$

其次，对于H^3中所有的点x和y，(3.3.4) 式意味着

$$4\sinh^2\frac{1}{2}\rho(x,y)=\frac{|x-y|^2}{x_3y_3}$$

变换g在$\mathbf{R}^3$（视作$\mathbf{C}\times\mathbf{R}^1$）上的作用如式

$$g:(z,t)\mapsto(u^2z,|u|^2t)$$

所示。故对$x=(z, t)$，有

$$4\sinh^2\frac{1}{2}\rho(x,gx)=\frac{|z-u^2z|^2+(t-|u|^2t)^2}{|u|^2t^2}$$

$$=\left(|u|-\frac{1}{|u|}\right)^2$$

$$+\left(\frac{|z|}{t}\right)^2\left|u-\frac{1}{u}\right|^2 \tag{5.4.9}$$

按照定义，g的轴A是连接g的两个不动点的测地线。对于(5.4.7)的特殊情形，轴A就是直线$z=0$.由(5.4.9)式，在A上各点的位移

$$T_g=\rho(x,gx)$$

与点x的位置无关；我们称T_g是g的**平移长度**.由恒等式(5.4.9)有

$$4\sinh^2\left(\frac{1}{2}T_g\right)=\left(|u|-\frac{1}{|u|}\right)^2 \qquad (5.4.10)$$

特别地，当g是椭圆元素时$T_g=0$。由于(5.4.8)中包含u的两项都是共轭变换下的不变量（它们可以用$\operatorname{tr}(g)$和T_g表示），因而$\sin^2\theta$也是共轭变换下的不变量。特别，当g是双曲元素时$\sin\theta=0$。

下一步是作出$\dfrac{|z|}{t}$的几何表示。读者可参看后面的7.9节，在7.9节将证明

$$\frac{|z|}{t}=\sinh\rho(x,A); \qquad x=(z,t)\in H^3$$

由此从(5.4.9)，(5.4.8)及(5.4.10)推出

$$\sinh^2\frac{1}{2}\rho(x,gx)=\sinh^2\left(\frac{1}{2}T_g\right)\cosh^2\rho(x,A)$$

$$+\sinh^2\rho(x,A)\sin^2\theta \qquad (5.4.11)$$

因此，在g作用下点x的位移由两个数值决定，这两个数值分别取决于轴上位移T_g和转角θ而且按照x与轴的距离作了修正。

〔定理5.4.5的证明〕 我们只需证(ii)和(iii)。通

过考虑共轭元素，不妨设g由（5.4.7）式给出。记

$$h=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad ad-bc=1$$

应用$Jorgensen$不等式有（参看定理5.4.1情形2的证明）

$$(1+|bc|)\left|u-\frac{1}{u}\right|^2 \geqslant 1 \tag{5.4.12}$$

为解释$|bc|$这一项，我们考虑使0，∞，$h0$，$h\infty$分别对应1，-1，w，$-w$的$Möbius$变换f。当且仅当两组点的交比相等，即有

$$[1,-1,w,-w]=\left[0,\infty,\frac{b}{d},\frac{a}{c}\right]$$

或等价地有

$$bc=\frac{(1-w)^2}{4w} \tag{5.4.13}$$

时这样的变换存在。此时A是以0和∞为端点的测地线；hA是以$h0$和$h\infty$为端点的测地线。因$\langle g,h\rangle$是非初等群，而测地线A和hA又不可能有公共端点；故$bc\neq 0$。这推出（5.4.13）中的w有两个解，并且两个解互为倒数。设w是一个解，不妨设$|w|\geqslant 1$；$f(A)$和$f(hA)$的位置如图5.4.1所示。

从（3.3.4）式容易推出

$$\begin{aligned}\rho(A,hA)&=\rho(fA,fhA)\\&=\inf\{\rho(x,y):x\in fA,y\in fhA\}\\&=\rho(e_3,|w|e_3)\\&=\log|w|\end{aligned}$$

因为若$(x,y,t)\in f(A)$，$(u,v,s)\in fh(A)$，则

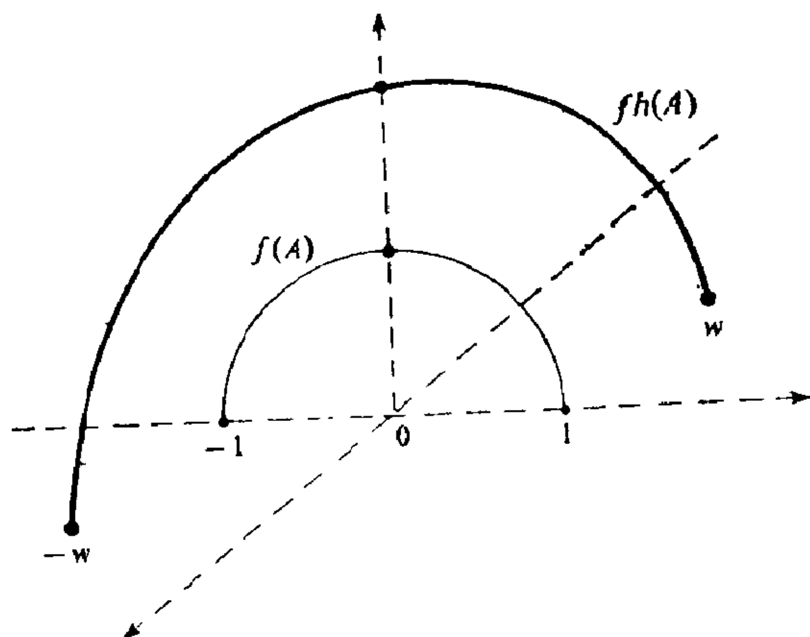


图 5.4.1

$$\frac{(x-u)^2+(y-v)^2+(t-s)^2}{ts}$$

$$=\frac{1+|w|^2-2(xu+yv+st)}{ts}$$

且可应用*Cauchy-Schwarz*不等式。

现在令

$$w=\exp 2(\alpha+\mathrm{i}\beta)$$

则

$$\rho(A,hA)=2\alpha$$

并且

$$bc=\sinh^2(\alpha+\mathrm{i}\beta)$$

因此

$$\begin{aligned}4|bc|^2 &= |\cosh 2(\alpha+\mathrm{i}\beta)-1|^2\\ &=(\cosh 2\alpha\cos 2\beta-1)^2+(\sinh 2\alpha\sin 2\beta)^2\end{aligned}$$

$$= (\cosh 2\alpha - \cos 2\beta)^2$$
$$\leqslant (1 + \cosh 2\alpha)^2$$
$$= (2\cosh^2 \alpha)^2$$

于是对H^3中所有的点x有

$$|bc| \leqslant \cosh^2 \alpha$$
$$= \cosh^2 \frac{1}{2}\rho(A, hA)$$
$$\leqslant \cosh^2 \frac{1}{2}[\rho(A, x) + \rho(x, hA)]$$

由log cosh是凸函数知

$$\cosh^2\left(\frac{p+q}{2}\right) \leqslant \cosh p \cosh q \quad (p, q\text{是实数})$$

从而有

$$|bc| \leqslant \cosh \rho(x, A) \cosh \rho(x, hA) \qquad (5.4.14)$$

最后，由互相共轭的元素g和hyh^{-1}具有相同的tr^2值和相同 的 平移长度可知$\sin^2\theta$的值也相同。由此及（5.4.12），（5.4.14），（5.4.8），（5.4.10），（5.4.11）式即得

$$(\sinh^2 \frac{1}{2}\rho(x, gx) + \sin^2\theta)(\sinh^2 \frac{1}{2}\rho(x, hgh^{-1}x)$$
$$+ \sin^2\theta) \geqslant [\frac{1}{4}\cosh \rho(x, A) \cosh \rho(x, hA)$$
$$\times |u - \frac{1}{u}|^2]^2$$

又因由（5.4.12）和（5.4.14）有

$$2\cosh\rho(x, A)\cosh\rho(x, hA)\left|u-\frac{1}{u}\right|^2\geqslant 1$$

故在所有情况下都有

$$\left(\sinh^2\frac{1}{2}\rho(x,gx)+\sin^2\theta\right)\left(\sinh^2\frac{1}{2}\rho(x,hgh^{-1}x)\right.$$

$$\left.+\sin^2\theta\right)\geqslant\frac{1}{64}$$

若g是双曲元素，则$\sin\theta=0$，从而得到（ii）。在其它情形下，令

$$m=\max\left\{\sinh\frac{1}{2}\rho(x,gx),\sinh\frac{1}{2}\rho(x,hgh^{-1}x)\right\}$$

则有

$$m^2+\sin^2\theta\geqslant\frac{1}{8}$$

由（iii）中的假设条件及（5.4.8）式推出

$$\sin^2\theta\leqslant\frac{1}{16}$$

因此有$m\geqslant 1/4$。 □

§ 5.5 注 记

对于5.1节中所作关于初等群的讨论，读者亦可参看〔30〕，〔51〕和〔107〕。在〔91〕和〔111〕中讨论了$\boldsymbol{R}^n$中的离散欧氏群。

关于不连续群在平面区域或在H^3中的几何作用的论文

可参看〔8〕,〔9〕,〔13〕,〔14〕,〔15〕,〔65〕,〔108〕和〔109〕。关于定理5.3.15及其推广，可参看〔30〕,〔51〕,〔54〕,〔60〕和〔61〕。至于更综合性的文献，我们引了〔5〕,〔25〕,〔30〕,〔35〕,〔50〕,〔51〕,〔52〕,〔57〕和〔114〕。

*Jorgensen*不等式是〔41〕提出的；与之有关的材料可参看〔14〕,〔40〕,〔44〕,〔45〕和〔89〕。

第六章　黎曼曲面

§ 6.1　黎曼曲面

粗略地说，黎曼曲面是一种就局部而言，与复平面没有本质区别的拓扑空间。正式下定义时必须使解析函数的概念和复解析函数理论能够毫无困难地推广到黎曼曲面上去。但此处我们将不去研究函数论方面的问题，而仅限于讨论黎曼曲面间的关系及其在不连续群作用下的商。并且只讨论到能够用黎曼曲面去解释有关不连续群的一些结果的程度为止。

一个连通的$Hausdorff$拓扑空间X称为一个**黎曼曲面**，如果存在一个图集

$$\{(\phi_j, U_j): j\in J\}$$

（每个（ϕ_j，U_j）是一张图）使得

(i)　$\{U_j: j\in J\}$ 是X的一个开覆盖；

(ii)　每个ϕ_j是U_j到复平面的某个开子集的同胚映射；

(iii)　当$U=U_i\cap U_j\neq\phi$时

$$\phi_i(\phi_j)^{-1}: \phi_j(U)\to\phi_i(U)$$

是平面点集$\phi_j(U)$和$\phi_i(U)$间的解析映射。

显然，(i) 是说X被一族“判别”开集所覆盖，由(ii)其中每个开集同胚于C的一个开子集。两个判别集可以相交，但由(iii)知，相交两判别集所对应的同胚之间通过一个解析同胚相关联。

现在我们可以来定义黎曼曲面之间的解析函数。设X和Y分别是具有图集$\{(\phi_j, U_j): j\in J\}$和$\{(\psi_k, V_k): k\in K\}$的黎曼曲面。称一个连续映射$f: X\to Y$为解析映射，如果每个映射

$$\psi_k f(\phi_j)^{-1}: \phi_j(U_j\cap f^{-1}(V_k))\to C \qquad (6.1.1)$$

都是解析映射。映射(6.1.1)的定义域是C的一个子集，f的连续性保证了该子集必是开集。显然，由(iii)可知，这只要对两个仍然分别提供X和Y一个开覆盖的子图集验明映射(6.1.1)的解析性即可。

我们也可以讨论X上两条（光滑）曲线γ和σ在某交点x处的交角。若$x\in U_j$，则我们就可以测出复平面中曲线$\phi_j(\gamma)$和$\phi_j(\sigma)$在点$\phi_j(x)$处的交角θ。如果同时又有$x\in U_i$，那么因其间由一个解析同胚(即共形映射)$\phi_j(\phi_i)^{-1}$关联着，而知$\phi_i(\gamma)$和$\phi_i(\sigma)$在$\phi_i(x)$的交角也是θ。这就推出θ与j的选择无关，故可取其作为γ与σ在点x的交角。

非平面的黎曼曲面的最简单的例子是$X=C\cup\{\infty\}$，其图集中的下标集$J=\{1,2\}$，且

$$\phi_1(z)=z, \qquad U_1=C$$

$$\phi_2(z)=\frac{1}{z}, \qquad U_2=\{\infty\}\cup\{z\in C: z\neq 0\}$$

显然，$\phi_2(\phi_1)^{-1}$在$\phi_1(U_1\cap U_2)$解析。

若在两个黎曼曲面R_1和R_2之间存在一个解析双射f(从而f^{-1}也解析)，则称黎曼曲面R_1和R_2共形等价。这就在由所有黎曼曲面组成的集合中建立了一个等价关系。通常，我们不去区分相互共形等价的黎曼曲面。

习题 6.1

1．证明黎曼曲面必是弧连通的。

2．求证：若R是包含点w_j，$j=1$，2，…，n的一个黎曼曲面，则$R-\{w_1,\cdots,w_n\}$也是一个黎曼曲面。

3．设f：$R\to S$是黎曼曲面R和S之间的一个非常数解析映射。试证明f把R的开子集映射成S的开子集。并证明：若R是紧黎曼曲面，则f是满映射，从而S也是紧黎曼曲面。

§ 6.2 商空间

构造黎曼曲面的一个方法是构造在不连续群作用下的商空间。事实上，每个已知的黎曼曲面也都是如此产生的。

定理6.2.1 若D是$\hat{C}$的一个区域，G是使D保持不变并且在D中不连续的$M\ddot{o}bius$变换群，则D/G是一个黎曼曲面。

［证］ 我们知道，D/G是具有商拓扑的拓扑空间，并且商映射π：$D\to D/G$连续。由于D是连通集且π连续，因而D/G是连通的（事实上是弧连通的）。显然，π还是一个开映射；因若$A\subset D$，则

$$\pi^{-1}(\pi A)=\bigcup_{g\in G}g(A)$$

故若A是开集（因而$g(A)$是开集）则π（A）也是开集。

再来证明D/G是$Hausdorff$空间。先选取D中不同的点z_1和z_2及正数r，使得圆盘

$$K_1=\{z:|z-z_1|\leqslant r\},\qquad K_2=\{z:|z-z_2|\leqslant r\}$$

包含于D。对于$n\geqslant 1$，命

$$A_n=\{z:|z-z_1|<\frac{r}{n}\}$$

$$B_n = \{ z : |z - z_2| < \frac{r}{n} \}$$

若对每个n都有

$$\pi(A_n) \cap \pi(B_n) \neq \phi$$

则存在A_n中的某个w_n及G中的某个g_n使得$g_n(w_n) \in B_n$。这就意味着

$$g_n(K) \cap K \neq \phi$$

其中$K = K_1 \cup K_2$（是紧集），并且由不连续性推出$\{g_1, g_2, \cdots\}$是有限集。适当选取子列就有$g_n = g$，且有

$$g(z_1) = \lim_{n \to \infty} g_n(w_n) = z_2$$

为证明D/G是$Hausdorff$空间，考虑D/G中两个不同的点，设其为$\pi(z_1)$和$\pi(z_2)$。从而z_1和z_2属于D但不属于由G确定的同一个等价类。

这就推出对于某个n，集$\pi(A_n)$和$\pi(B_n)$互不相交并且分隔$\pi(z_1)$和$\pi(z_2)$，同时由于π是开映射，这两个集也都是开集。

最后来构造D/G的图集。对于D中每一点z，选取一个开圆盘N_z使得它的闭包包含于D，且具有如下性质：

$$g(N_z) = N_z, \qquad \text{若} g(z) = z$$

$$g(N_z) \cap N_z = \phi, \qquad \text{若} g(z) \neq z$$

参看定理5.3.11和5.3.12。

容易看出$N_z - \{z\}$不含G中任何非恒等元素的不动点。事实上，若$h(\neq I)$以N_z中一点为不动点，则由N_z的定义知h以z为不动点；而z关于N_z的反演点也是h的不动点，这与$h \neq I$相矛盾。因此在$N_z - \{z\}$中没有h的不动点。回忆

一下，如果h以z为不动点，那么h就是一个椭圆元素。

对于D中每一点w，以σ表示把w映射为原点、把N_w映射成单位圆盘Δ的Möbius变换。w在G中的稳定核（设为n阶）可以由某个椭圆元素g生成，g满足等式

$$\sigma g\sigma^{-1}(z)=z\exp\left(\frac{2\pi i}{n}\right),\quad z\in\Delta$$

现设$q(z)=z^n$，它把Δ映射为自身并且具有如下性质：对于所有的k和N_w中所有的点z均有

$$\begin{aligned} q\sigma g^k(z) &= [\sigma g^k\sigma^{-1}(\sigma z)]^n \\ &= \left\{\sigma(z)\exp\left(\frac{2k\pi i}{n}\right)\right\}^n \\ &= \sigma(z)^n \qquad (6.2.1) \end{aligned}$$

显然，这与k无关。

取

$$(q\sigma(\pi_w)^{-1},\ \pi_w(N_w))$$

作为D/G的图，其中π_w是π在N_w上的限制；参看图6.2.1。

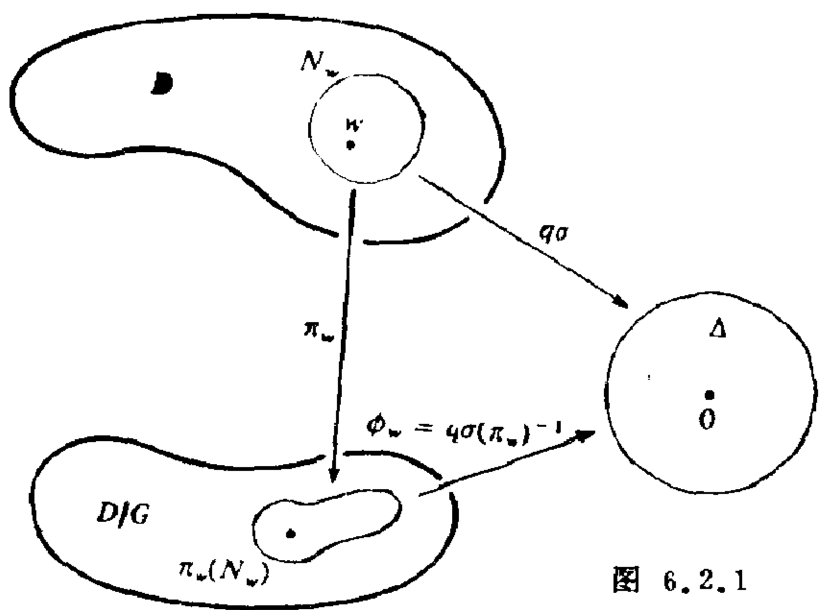


图 6.2.1

$\pi_w(N_w)$ 中的每一个点经 $(\pi_w)^{-1}$映射成 N_w中的 n 个点，设为$g^k(z)$，$k=0, 1, \cdots, n-1$。根据(6.2.1) 式，这些点在$g\sigma$的映射下变为Δ中的同一点，于是

$$\phi_w = q\sigma(\pi_w)^{-1}$$

是$\pi_w(N_w)$ 到Δ的双射。由q，σ和π_w既是开映射又是连续映射可以看出每个ϕ_w都是同胚。

要验证过渡映射解析，首先必须研究映射

$$(\pi_v)^{-1}\pi_u, \quad u \neq v \tag{6.2.2}$$

若假定$\zeta_u \in N_u$，$\zeta_v \in N_v$和$\pi(\zeta_u)=\pi(\zeta_v)=\zeta$，则对于$G$中的某个$g$有

$$\zeta_v = g(\zeta_u)$$

现在若假设ζ_u（因而ζ_v）不是椭圆不动点，则π_v在ζ_v的某个邻域内是1-1的；从而存在局部逆映射$(\pi_v)^{-1}$把ζ映射成ζ_v。两映射

$$\pi_v g, \qquad \pi_u$$

在ζ_u的某个邻域上都与π一致，因而相等，并且取值于$\pi_v(N_v)$中.利用 $(\pi_v)^{-1}$，即知在ζ_u邻近有

$$g = (\pi_v)^{-1}\pi_u$$

这就证明了映射（6.2.2）在G的非椭圆不动点的邻近解析。

现在来证明过渡映射

$$\phi_v(\phi_u)^{-1} \qquad (u \neq v)$$

在其定义域内解析。将ϕ_v表示成

$$\phi_v = q_v\sigma_v(\pi_v)^{-1}$$

对ϕ_u作类似的表达；其情形如图6.2.2所示。在对应于G的非不动点的那些点处，通过选取$(q_u)^{-1}$的单值分支计算 $\phi_v(\phi_u)^{-1}$，而知映射$\phi_v(\phi_u)^{-1}$是解析映射的复合。在对应于椭圆不动

点的那些点处，同胚映射$\phi_v(\phi_u)^{-1}$在所讨论的那个点的一个去心邻域内解析(见前面的附注)，因而该点是可去奇点。□

定理6.2.1的一个逆命题也成立（此处不作证明）：任意给定一个黎曼曲面R，可构造出单连通黎曼曲面$\hat{R}$和映射$\pi:\hat{R}\to R$具有如下性质：

(i) $\hat{R}$中每一点$\hat{z}$都有一个邻域$\hat{N}$，使得π在$\hat{N}$上的限制是到R的一个开集的同胚；

(ii) 给定任何一条曲线γ：$[0,1]\to R$，以及$\hat{R}$上满足$\pi(\hat{z})=\gamma(0)$的任何一点$\hat{z}$，存在唯一的一条曲线$\hat{\gamma}$：$[0,1]\to\hat{R}$使得$\pi\hat{\gamma}=\gamma$，$\hat{\gamma}(0)=\hat{z}$(称γ为$\hat{\gamma}$的投影，或称$\hat{\gamma}$是γ在$\hat{z}$点的提升）。

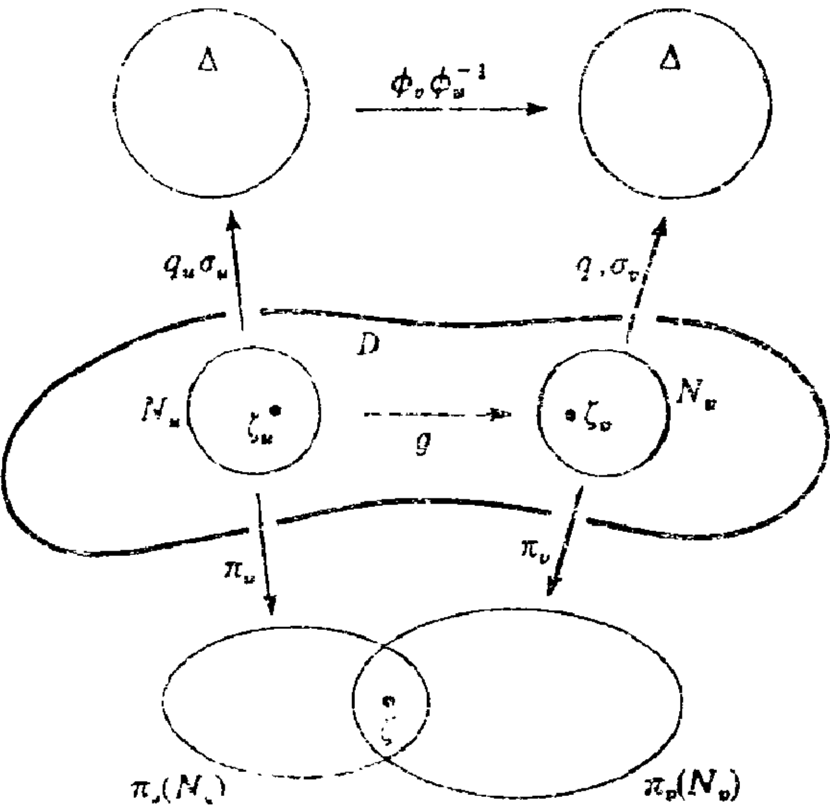


图 6.2.2

这些性质也可用一句话来表达，即（$\hat{R},\pi$）是R的一个无约束的光滑覆盖曲面。由关于黎曼曲面的黎曼映射定理知，$\hat{R}$共形等价于下列三个标准黎曼曲面中的一个：

$$\Delta=\{|z|<1\},\quad C,\quad C\cup\{\infty\}$$

（具有平凡的图集）；故不失一般性可假定$\hat{R}$就是这三个黎曼曲面之一。

可以证明，必存在使$\hat{R}$保持不变的Möbius变换群G，使得给定的曲面R共形等价于$\hat{R}/G$。记商映射为π意味着对G中所有的g均有$\pi g=\pi$。进而还可证明G在$\hat{R}$中为不连续群，并且没有椭圆元素。

若$\hat{R}=C\cup\{\infty\}$，则所述诸限制条件即意味着$G=\{I\}$（平凡群），因此就本质而言，$R=C\cup\{\infty\}$。若$\hat{R}=C$，则G只有如下几种可能：(i)平凡群；(ii)由某个平移$z\mapsto z+\lambda$生成的循环群；(iii)由两个平移变换$z\mapsto z+\lambda, z\mapsto z+\mu$生成的群，其中$\lambda$和$\mu$在实数域上线性无关（即$\lambda/\mu$不是实数—译者注）。这些情况表明，$R$或者是$C$，或者是$C^*=\{z\in C:z\neq0\}$，或者是一个环面。在所有其他的情形中，$R$具有$\Delta/G$的形式，其中$G$是$\Delta$中的不连续群并且没有椭圆元素。若$R$是亏格为$g$的紧黎曼曲面，则当$g=0$时$\hat{R}=\hat{C}$，$g=1$时$\hat{R}=C$，$g\geqslant2$时$\hat{R}=\Delta$。

从上述即可看出Δ（或Δ在某个共形映射下的像域）中的不连续群的重要性。

定义6.2.2 Möbius变换群G是一个Fuchs群，当且仅当存在某个G不变圆盘，使得G在该圆盘内为不连续群。

如果黎曼曲面R可以表示成Δ/G的形式（G是作用在Δ

上的群），则说R是属于双曲型的。在这种情况下，可将微分

$$ds=\frac{2|dz|}{1-|z|^2}$$

视为是作用在R上的；R上的每条曲线都可以分成一些小段，这些小段的长度可按照一种不变的形式在Δ内计算。按照这种方式，我们就可以讨论R上的双曲度量，从而可以计算R上的长度和面积。

对于$g\in G$，用Δ内的曲线连接z和$g(z)$，由于$\pi g(z)=\pi(z)$该曲线在R上的投影是一条闭曲线。反之，若选定一条闭曲线γ：$[0,1]\to R$和Δ内一点z，使得$\pi(z)=\gamma(0)$，则存在唯一的一条曲线$\hat{\gamma}$：$[0,1]\to\Delta$满足$\pi\hat{\gamma}=\gamma$，$\hat{\gamma}(0)=z$，注意到

$$\pi\hat{\gamma}(1)=\gamma(1)=\gamma(0)=\pi(z)$$

故对G中某个h有$\hat{\gamma}(1)=h(z)$；从而$\hat{\gamma}$是从z到$h(z)$的一条曲线。若γ同伦于R上一点z，则由单值性定理可知，$\hat{\gamma}$是Δ上的一条闭曲线且因h不是椭圆元素而有$h=I$。

更一般地，我们还可以考虑n维流形：在黎曼曲面的定义中，(ii)中的C代之以R^n，并删去条件(iii)（或以某种其他的光滑条件代替"解析"）。若G是任一离散的Möbius群，则G是H^3中的不连续群，并且可以研究H^3/G；近年来这一论题已引起了人们更多的关注。

习题 6.2

1．设G是由$g: z\mapsto z+1$生成的群。试证明H^2/G共形等价于$\Delta^*=\{z: 0<|z|<1\}$．（提示：考虑映射$z\mapsto\exp(2\pi iz)$）。

指出如何将H^2的度量 $\frac{|dz|}{\operatorname{Im}z}$ 投影为Δ^*中的度量$\mu(w)|dw|$。求出μ，并证明在这个度量下$\{z: 0<|z|<1/2\}$的面积是有限的。

§ 6.3 稳定集

假定区域D($\hat{C}$的子集)是G不变集，且G是D内的不连续群。我们需要考虑如下的不变性类型。

定义6.3.1 D的子集D_0称为关于G的稳定集（或准不变集），当且仅当对G中所有的g有

$$g(D_0)=D_0 \quad \text{或} g(D_0)\cap D_0=\phi$$

满足$g(D_0)=D_0$的g的集合称为D_0的稳定核。

关于稳定集的例子可参看定理5.3.12。

设D_0是以G_0为稳定核的稳定集，我们自然会想到去构造商空间D_0/G_0，并且一般地说，讨论D_0/G_0要比讨论D_0到D/G的投影$\pi(D_0)$容易些(比如，当G_0是循环群时)。可惜的是两空间

$$D_0/G_0, \qquad \pi(D_0)$$

不必同胚，下面的例子说明了这一点。

例6.3.2 取$D=C$，设G是由$g(z)=z+1$生成的群，$D_0=\{x+iy: 0\leqslant x<1\}$。显然，$D_0/G_0(=D_0)$是单连通的，而$\pi(D_0)$ $(=\pi(C)=\{z\in C: z\neq 0\})$ 却不是。

当然，也存在着D_0/G_0与$\pi(D_0)$同胚的情形，下面给出出现这种重要情形的明确条件。

定理6.3.3 假定G在D内不连续，且D_0是以G_0为稳定核的稳定集。若

(i)　D_0是D中的开集；或者

(ii)　D_0/G_0是紧集；

则D_0/G_0（具有商拓扑）与$\pi(D_0)$（具有D/G的子空间拓扑）同胚。

［证］　两个商映射

$$\pi:\ D\to D/G,\qquad \phi: D_0\to D_0/G_0$$

都是连续的开映射，因为各个群是相应空间的同胚群。π_0作为π在D_0的限制是连续的，因此命x的G_0轨道$G_0(x)$对应G轨道$G(x)$而作成的双向映射

$$\theta=\pi_0\phi^{-1}: D_0/G_0\to\pi(D_0)$$

是连续映射（参看图6.3.1）。

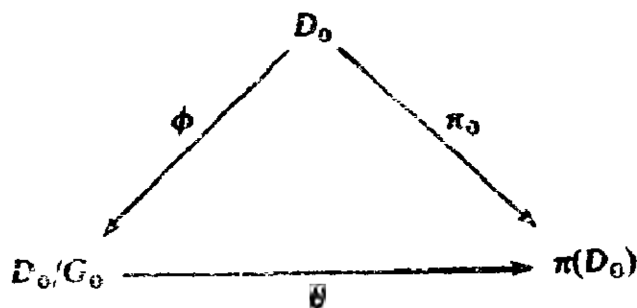


图 6.3.1

若(i)成立，则π_0是开映射（因为π是开映射）并且θ^{-1}是连续映射。若(ii)成立，则θ是从一个紧空间到一个$Hausdorff$空间的连续双向映射，因而是同胚（参看1.4节）。　□

注：若D_0是$\hat{C}$的子区域，则ϕ和π解析，从而D_0/G_0与$\pi(D_0)$共形等价。

我们举出几个例子用来说明定理6.3.3中的假设条件(i)和(ii)，以结束本章。

例6.3.4 假定G是使C的上半平面H^2保持不变的不连续群，g是G的一个双曲元素。不妨设g以0和∞为不动点，因而正虚轴L在g的映射下不变。

假定对G中所有的h均有$h(L)=L$或$h(L)\cap L=\phi$，并且G中没有二阶椭圆元素（这样的元素使L保持不变，但使L的两个端点互换）。这种情形在本书以后的章节中将要作详细的讨论。由假设条件推出，$h(L)=L$只对G的一个循环子群中的元素成立，这个循环子群是由某个以0和∞为不动点的双曲元素（设为g）生成的。比如$g(z)=kz\ (k>1)$，且$L/\langle g\rangle$是紧集，实际上这是一条简单闭曲线。根据定理6.3.3，L在H^2/G中的投影也是一条简单闭曲线。

例6.3.5 假定G是$\hat{C}$的某个子区域D上的不连续群，且存在一个开圆盘Q是以$\langle g\rangle$为稳定核的稳定集（g是一个抛物元素）。因Q是开集，定理6.3.3表明Q在D/G中的投影共形等价于$Q/\langle g\rangle$.

经共轭变换，不妨设$g(z)=z+1$，于是对于某个y_0有

$$Q=\{x+iy: y>y_0\}$$

显然，商空间$Q/\langle g\rangle$共形等价于Q在映射$z\mapsto \exp(2\pi iz)$下的像；因此Q在D/G中的投影共形等价于一个穿孔圆盘，即等价于

$$\{z\in C: 0<|z|<1\}$$

把∞（g的不动点）及其在G中每个元素作用下的像添加到D上去而成为一个更大的空间D^*。D^*上的拓扑包括D的所有开子集、形如$\{\infty\}\cup\{x+iy: y>t\}$的集以及它们在$G$中元素作用下的像。商空间$D^*/G$也是一个黎曼曲面；将$\infty$添入$D$对应于把原点填入穿孔圆盘。但由于序列$n+iy, n\geqslant 1$在$D^*$拓

朴下是不收敛的，因此在D^*中不存在∞的紧邻域。当然，只要相应的圆盘Q存在，我们可以把各个抛物不动点的轨道添入D。在〔50〕的第二章中有更详细的讨论，并且有一个逆定理。

习题 6.3

1. 设G是由$g(z)=z+1$和$h(z)=z+\mathrm{i}$生成的群，

$$D=\{x+\mathrm{i}y: 0\leqslant y<1\}$$

试证明D是$\langle g\rangle$的稳定集。设π是C到C/G的自然投影。试证明$\pi(D)$是紧集，而$D/\langle g\rangle$却不是紧的。

第七章　双曲几何

§7.1　双曲平面

在本书的开始阶段，我们是假定读者承认并且熟悉欧几里德几何学的；而并没有讨论过几何学的公理化基础，并且也不准备这样做。但这就会出现一个问题：我们应当怎样去处理双曲几何。当然，不能假定读者像熟悉欧氏几何那样熟悉双曲几何，因此有必要提供双曲几何学中的一些更基本的初等结果，这也是因为在本书的余下部份要用到双曲几何（而不用欧氏几何）。事实上，在前几章中，我们已经看到了双曲几何的重要性。

我们将用欧氏几何的术语来描述双曲几何，因而就此而言可认为双曲几何从属于欧氏几何。点、线以及其他构形均将被定义为欧氏平面的子集，这样就使我们避免了讨论双曲几何学公理的必要性。当然，适合于双曲几何学的一组公理是存在的，并且一旦验证了这些公理在我们的模型中也成立，我们就完全可以运用由这些公理导出的那些定理。不过，我们不打算这样做。我们对限制在欧氏几何范围内的双曲几何所作的讨论将尽可能做到严格和完备。

在3.3节中已经看到，可以以上半平面

$$H^2 = \{ x + iy : y > 0 \}$$

作为双曲平面的一个模型，其度量ρ由微分

$$ds = \frac{|dz|}{\operatorname{Im} z} \tag{7.1.1}$$

给定；并且关于形如 $|z-x_0| = r$（x_0是实数，$r>0$）的圆周的反演和关于形如 $x = x_1$（x_1是实数）的“竖”直线的反演都是 (H^2, ρ) 的等距变换。在下面的几节中，我们将重提这些事实。

也可以用单位圆盘

$$\Delta = \{ z \in C : |z| < 1 \}$$

作为模型建立一套平行的理论。应用3.4节的结果将H^2中的度量ρ转换成Δ中的度量，它由微分

$$ds = \frac{2|dz|}{1-|z|^2} \tag{7.1.2}$$

给出。

在本书的整个余下部份中，我们将用 ρ 同时表示H^2中的度量和Δ中的度量。这不应当引起混淆，读者必须使自己善于从一种模型转向另一种模型，因为两种模型各有其特别方便之处。

用欧氏几何的术语来讨论双曲几何，其主要好处之一是便于引入无穷远圆周（由无穷远点组成）的概念，对H^2这就是 $R^1 \cup \{\infty\}$，对Δ这就是 $\{z: |z| = 1\}$。虽然无穷远圆周上的点都不是双曲平面中的点，但在双曲几何与*Fuchs*群的研究中这种点却起着极为重要的作用。双曲平面与无穷远圆周的并称为闭双曲平面。

我们称如上所述的两种双曲几何模型为*Poincaré*模型。还有一些其他可供选用的模型（参看3.7节），我们将简略地讨论其中的一种，即*Klein*模型。不过读者应当注意，除了7.5节中的一个结果以及偶尔在一些附注和习题中涉及到

Klein模型之外，我们将不用这种模型。

在3.4节中我们已知关于平面$x_3=0$的反射与球极投影的复合把H^3等距映射成B^3，两空间的度量与（7.1.1）和（7.1.2）类似。记复合映射为s。这就推出上半球面

$$Q=\{(x_1,x_2,x_3):x_1^2+x_2^2+x_3^2=1,\ x_3>0\}$$

（这是嵌在双曲空间H^3中的一个双曲平面模型）经s等距映射成嵌在B^3中的Δ（$=B^2$）。显然，由于s是共形映射，Q中正交于∂H^3中的圆周上的圆弧被映射成Δ中正交于∂B^3的圆周上的圆弧。

我们也可以用竖直投影即

$$v:(x_1,x_2,x_3)\longmapsto x_1+ix_2$$

把Q映射成Δ。因此，在Δ到Δ的映射$F(=vs^{-1})$作用下，Δ中正交于$\partial\Delta$的圆弧（Δ中的测地线）被映射成欧氏线段，线段的两个端点与圆弧在$\partial\Delta$上的两个端点相同（即该圆弧的弦）。这意味着F是闭单位圆盘$\overline{\Delta}$到自身的同胚，它把Poincaré模型Δ中的测地线L映射成与L具有相同端点的欧氏直线段L^*；参看图7.1.1。

F的作用容易以分析的方法加以验证，并且上述的讨论对n维的情形同样有效。若$x\in B^n$，则

$$\begin{aligned}F(x)&=vs^{-1}(x)\\&=v\pi^{-1}(x)\\&=v\pi(x)\end{aligned}$$

其中π是球极投影（或更确切地说是关于$S(e_{n+1},\sqrt{2})$的反射）。由3.1节中所给出的π的公式推出F的显式表达式为

$$F(x)=\frac{2x}{1+|x|^2}$$

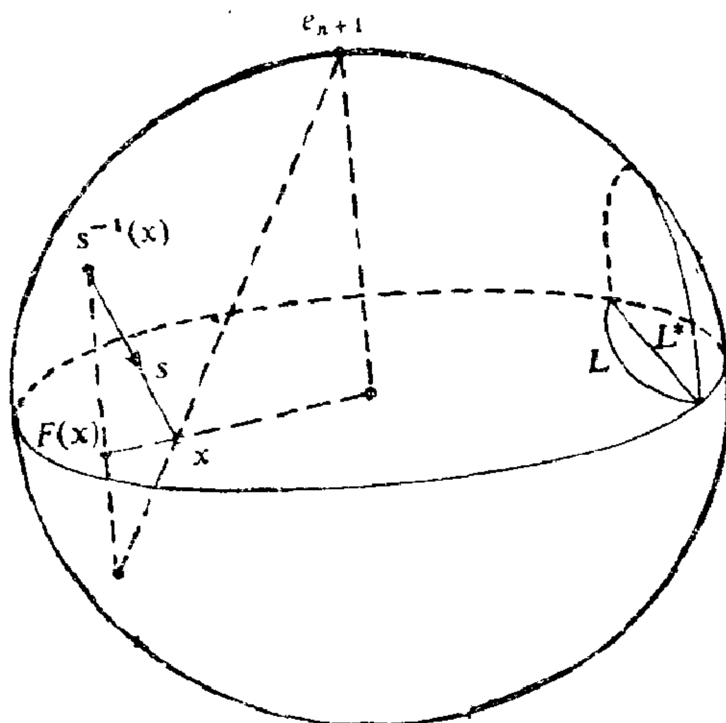


图 7.1.1

给定一个正交于∂B^n的球面 $S(a,r)$，由于正交性即意味着$|a|^2=1+r^2$，因此S上的点满足方程

$$|x|^2+1=2(x,a)$$

于是F把$S(a,r)$ 映射成欧氏超平面

$$S^*=\{y:(y,a)=1\}$$

它与∂B^n的交集同$S(a,r)$ 与∂B^n的交集相同。

就建立有关凸性和关联性来说，双曲几何学的Klein模型（即以欧氏线段L^*为测地线的模型Δ）是一个很有用的模型，因为它能使双曲几何中的问题转换成欧氏几何中相应的问题。

§ 7.2 双曲度量

首先，我们要对由微分（7.1.1）所确定的度量ρ的构

成作一仔细的讨论。对于H^2中每条逐段连续可微曲线γ:
$[a,b]\to H^2$，以公式

$$\|\gamma\|=\int_a^b\frac{|\gamma^{(1)}(t)|}{\operatorname{Im}\gamma(t)}\,dt$$

定义其“长度”。于是，函数ρ定义为

$$\rho(z,w)=\inf\|\gamma\| \qquad (z,w\in H^2)$$

其中的下确界是在H^2内所有连接z和w的γ的集合上取的。
显然，ρ非负、对称且满足三角不等式

$$\rho(z_1,z_3)\leqslant\rho(z_1,z_2)+\rho(z_2,z_3)$$

因而ρ确是H^2上的一个度量（参看1·6节）。

设

$$g(z)=\frac{az+b}{cz+d} \tag{7.2.1}$$

其中a,b,c,d是实数且$ad-bc>0$；则g把H^2映射为自身。经初等计算即推出

$$\frac{|g^{(1)}(z)|}{\operatorname{Im}g(z)}=\frac{1}{\operatorname{Im}z}$$

故有

$$\|g\gamma\|=\int_a^b\frac{|g^{(1)}(\gamma(t))|\cdot|\gamma^{(1)}(t)|}{\operatorname{Im}g(\gamma(t))}dt=\|\gamma\|$$

由于这一不变性，我们就可以直接得出ρ的不变性，即

$$\rho(gz,gw)=\rho(z,w) \tag{7.2.2}$$

这就证明每个这样的g都是(H^2,ρ)的一个等距映射。这可用来求出$\rho(z,w)$的显式表达式。

定理7.2.1 对于上述的ρ及H^2中的点z,w,有

(i) $$\rho(z,w)=\log\frac{|z-\bar{w}|+|z-w|}{|z-\bar{w}|-|z-w|}$$

(ii) $$\cosh\rho(z,w)=1+\frac{|z-w|^2}{2\operatorname{Im}z\operatorname{Im}w}$$

(iii) $$\sinh\left[\frac{1}{2}\rho(z,w)\right]=\frac{|z-w|}{2[\operatorname{Im}z\operatorname{Im}w]^{\frac{1}{2}}}$$

(iv) $$\cosh\left[\frac{1}{2}\rho(z,w)\right]=\frac{|z-\bar{w}|}{2[\operatorname{Im}z\operatorname{Im}w]^{\frac{1}{2}}}$$

(v) $$\tanh\left[\frac{1}{2}\rho(z,w)\right]=\frac{|z-w|}{|z-\bar{w}|}$$

[证] 容易看出这五个方程是等价的；我们来证明(ii)成立。

由(7.2.2)式知，在g的作用下(ii)的左端保持不变。经直接计算表明

$$\frac{|g(z)-g(w)|^2}{\operatorname{Im}g(z)\operatorname{Im}g(w)}=\frac{|z-w|^2}{\operatorname{Im}z\operatorname{Im}w}$$

故(ii)的右端在g的作用也保持不变。事实上，这只不过是3.3节中所得表达式(3.3.3)的不变性。

取定H^2中不同的点z和w，设L是包含z和w且与实轴正交的欧氏圆周或直线，α是L与实轴的一个有限交点，通过取$g(z)=-(z-\alpha)^{-1}+\beta$($\beta$是一个适当的复数)，可设(7.2.1)的$g$把$L$映射成虚轴。因而只需对$z$和$w$位于虚轴上的情况验证(ii)式。

设$z=\mathrm{i}p$，$w=\mathrm{i}q$；此外，还假定$0<p<q$（因（ii）式两端关于z和w对称）。若

$$\gamma(t)=x(t)+\mathrm{i}y(t),\qquad 0\leqslant t\leqslant 1$$

是连接z和w的任一曲线，则由$y(1)=q$，$y(0)=p$而有

$$\|\gamma\|=\int_0^1 \frac{|x^{(1)}(t)+\mathrm{i}y^{(1)}(t)|}{y(t)}\mathrm{d}t$$

$$\geqslant\int_0^1 \frac{y^{(1)}(t)}{y(t)}\mathrm{d}t$$

$$=\log\frac{q}{p}$$

由于当

$$\gamma(t)=\mathrm{i}[p+t(q-p)]$$

时等号成立，故得

$$\rho(\mathrm{i}p,\mathrm{i}q)=\log\frac{q}{p}\qquad (0<p<q)$$

且容易看出当$z=\mathrm{i}p$，$w=\mathrm{i}q$时（ii）式成立。 □

注：我们已证得的结果比定理7.2.1中所叙述的要多一点。首先，我们推出当且仅当对一切$t\in[0,1]$有$x(t)=0$，$g^{(1)}(t)>0$时

$$\|\gamma\|=\rho(\mathrm{i}p,\mathrm{i}q)$$

（即$\|\gamma\|$为最小值）。下一节中我们还要再来讨论这一点。其次，作为进一步的推论我们得到公式

$$\rho(\mathrm{i}p,\mathrm{i}q)=\left|\log\frac{p}{q}\right| \tag{7.2.3}$$

写成这一形式就无需再假定$p<q$。

现在来讨论模型$\varDelta$。因映射

$$f(z)=\frac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}$$

把H^2一一地映射成Δ，故由等式

$$\rho^*(z,w)=\rho(f^{-1}z,f^{-1}w)\qquad (z,w\in\Delta)$$

给出的ρ^*是Δ上的度量。由式

$$\frac{2|f^{(1)}(z)|}{1-|f(z)|^2}=\frac{1}{\operatorname{Im}z}\qquad (z\in H^2)$$

可知ρ^*同由微分(7.1.2)导出的度量一致。我们曾提到过要用ρ代替ρ^*，按照这一约定，f是（H^2,ρ）到（Δ,ρ）的等距映射。

利用f对定理7.2.1作简单的改写，即可导出关于模型Δ的相应公式。当然，若直接对Δ求出这些公式会更有意义；例如，与（7.2.3）式相对应，我们推出：若$0<r<1$，则

$$\rho(0,r)=\int_0^r\frac{2dt}{1-t^2}=\log\frac{1+r}{1-r}$$

（请读者验证之）。

给定不同的点z和w，存在Δ到自身的等距映射g满足$g(z)=0$，$g(w)=r$，$r>0$。由（3.4.3）式所表明的不变性推出

$$\frac{|z-w|^2}{(1-|z|^2)(1-|w|^2)}=\frac{r^2}{1-r^2}$$

$$=\sinh^2\left[\frac{1}{2}\rho(0,r)\right]$$

$$=\sinh^2\left[\frac{1}{2}\rho(z,w)\right]\qquad(7.2.4)$$

而恒等式（3.4.4）则化为

$$|1-z\overline{w}|^2=|z-w|^2+(1-|z|^2)(1-|w|^2)$$

将此式与（7.2.4）式结合推出

$$\cosh^2\left[\frac{1}{2}\rho(z,w)\right]=\frac{|1-z\overline{w}|^2}{(1-|z|^2)(1-|w|^2)}$$

实际上这就是（3.4.5）式。最后，我们得到

$$\tanh\left[\frac{1}{2}\rho(z,w)\right]=\frac{z-w}{1-z\overline{w}}$$

及

$$\rho(z,w)=\log\frac{|1-z\overline{w}|+|z-w|}{|1-z\overline{w}|-|z-w|} \tag{7.2.5}$$

作为这些结果的简单而有用的例子，我们来计算圆周的长度和圆盘的面积（见(3.3.5)式）。当然，此处的长度和面积是关于双曲度量的，它们都是等距映射下的不变量。

若E包含于Δ，则E的双曲面积为

$$\text{h-area}(E)=\iint_E\left(\frac{2}{1-|z|^2}\right)^2dxdy$$

若E包含于H^2，则其被积函数改作$1/y^2$。对Δ中的任何曲线C，其双曲长度为

$$\text{h-length}(C)=\int_C\frac{2|dz|}{1-|z|^2}$$

若C包含于H^2，其被积函数就改作$1/y$。

定理7.2.2 （i） 半径为r的双曲圆盘的面积为$4\pi\sinh^2(\frac{1}{2}r)$。

(ii) 半径为r的双曲圆周的长度为$2\pi\sinh r$。

[证] 利用模型Δ，并设C和D是以O为中心，以r为半径的双曲圆周和双曲圆盘。由（7.2.4）式知

$$C=\{z:|z|=R\},\qquad D=\{z:|z|<R\}$$

其中

$$\sinh\left(\frac{1}{2}r\right)=\frac{R}{(1-R^2)^{\frac{1}{2}}}$$

或与之等价的有

$$\tanh\left(\frac{1}{2}r\right)=R$$

此时，定理中所述的结果即可经直接积分得到。 □

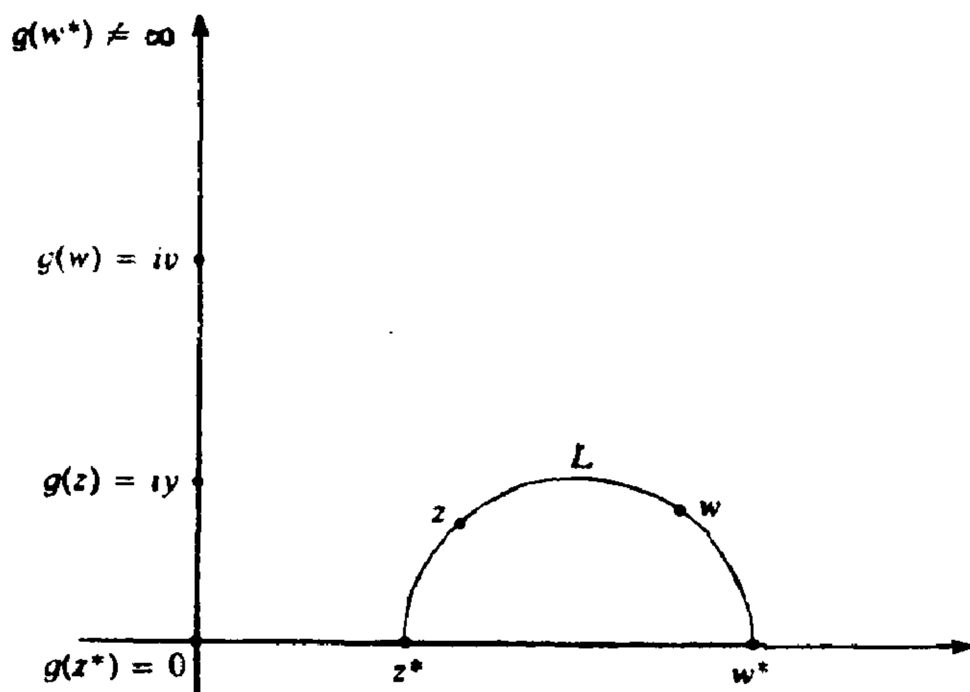


图 7.2.1

利用无穷远圆周上的点，也可用 比来表示$\rho(z,w)$。回忆在4.4节中，交比定义为

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}$$

设z和w是H^2中不同的点，g和L如定理7.2.1的证明里所设，并且L与实轴的交点为z^*和w^*，使得它们沿着L以z^*，z，w，w^*的顺序出现（参看图7.2.1）。而因$g(L)$是虚轴，有$g(z^*)=0$或$g(z^*)=\infty$。若$g(z^*)=\infty$，可再应用映射$z \mapsto -1/z$；故不妨设所选取的g使得

$$g(z^*)=0, \quad g(z)=\mathrm{i}y, \quad g(w)=\mathrm{i}v, \quad g(w^*)=\infty$$

其中$y<v$。由交比在Möbius变换下的不变性，从（7.2.3）式即得

$$\begin{aligned}\rho(z,w) &= \rho(gz, gw)\\ &= \log\frac{v}{y}\\ &= \log[0, \mathrm{i}y, \mathrm{i}v, \infty]\\ &= \log[z^*, z, w, w^*] \qquad (7.2.6)\end{aligned}$$

当然，这在Δ内也同样成立，因为我们可将H^2等距映射为Δ而不改变其交比的值。

在本节的结尾，我们简略地提一下双曲平面的度量拓扑。首先，H^2（以及Δ）上的欧氏度量与双曲度量所诱导的拓扑相同。特别地，闭双曲平面是欧氏拓扑中的紧集，其子空间拓扑即双曲拓扑。为了方便，我们引入相对于双曲平面和闭双曲平面的闭包的概念。

定义7.2.3 设E是双曲平面的子集。则

(i) 以$\widetilde{E}$表示E相对于双曲平面的闭包；

(ii) 以$\overline{E}$表示E相对于闭双曲平面的闭包。

当然，$\overline{E}$也是E在$\hat{C}$中的闭包。

习题 7.2

1. 设L是H^2中满足$x=y$的点$x+\mathrm{i}y$的集合。找出使下确界

$$\inf\{\rho(z,\omega): z\in L\} \qquad (w\in H^2)$$

达到的点，并用几何术语描述该点。

2. 假定$x_1<x_2<x_3<x_4$。设H^2中以$[x_1, x_3]$为直径的半圆周与直线$x=x_2$交于点z_3。类似的设z_4是该直线与以$[x_1, x_4]$为直径的半圆周的交点。求证

$$\rho(z_3, z_4)=\frac{1}{2}\log[x_2, x_3, x_4, \infty]$$

3. 求证：若σ是集X上的一个度量，则$\tanh\sigma$也是X上的一个度量。试证明

$$\rho_0(z, w)=\left|\frac{z-w}{z-\overline{w}}\right|$$

是H^2上的一个度量，并且当且仅当$w=u$(或$w=v$)时，有

$$\rho_0(u, v)=\rho_0(u, w)+\rho_0(w, v)$$

4. 证明(H^2, ρ)是完全空间但不是紧空间。

§7.3 测地线

我们把与无穷远圆周正交的欧氏圆周（或直线）同双曲平面的交集称为双曲直线。由这一定义容易得出如下事实。

(1) 过双曲平面内任意不同两点必有唯一的一条双曲直线。

(2) 两条双曲直线在双曲平面内至多交于一点。

(3) 关于双曲直线的反射是ρ等距的（参看3.3节）。

(4) 任意给定两条双曲直线L_1和L_2，必存在ρ等距映射g使得$g(L_1)=L_2$（参看定理7.2.1的证明）。

给定H^2中任意一点w，显然

$$\{ z\in H^2 : |z| = |w| \}$$

是唯一的一条包含w点且与正虚轴(双曲直线)正交的双曲直线。由于(4)中的等距映射可取作Möbius变换，因而得到

(5) 任意给定一条双曲直线L及点w，必存在唯一的一条双曲直线过w点且与L正交。

无需详述，读者应当意识到，直线上"两点之间"的概念是公理化几何学的基本特征。此处，我们可用度量来描述这一概念。

给定双曲直线L上不同两点z和w，集合$L-\{z,w\}$具有三个分支，其中恰好有一个分支的闭包(相对于双曲平面)是紧集。这一分支是开线段(z,w)，并且当且仅当$\zeta\in(z,w)$时ζ是z和w之间的点。闭线段$[z,w]$以及线段$[z,w)$和$(z,w]$的定义是显而易见的。

关于上一节(7.2.3)式的讨论表明：连接ip和iq的曲线γ满足

$$\|\gamma\| = \rho(ip,\ iq)$$

当且仅当γ是作为一条简单曲线$[ip,iq]$的一个参数表示，显然，这可叙述成如下的不变形式。

定理7.3.1 设z和w是双曲平面内任意两点。连接z和w的曲线γ满足

$$\|\gamma\| = \rho(z,w)$$

当且仅当γ是作为一条简单曲线$[z,w]$的一个参数表示。

这就是我们称双曲直线为测地线(即短程线)的理由。

现在考虑任意三点z,w,ζ。从(7.2.3)的特殊情况中容易看出，若ζ在z和w之间，则

$$\rho(z,w)=\rho(z,\zeta)+\rho(\zeta,w)$$

同样明显的是，若ζ不在z和w之间，则由线段$[z,\zeta]$和$[\zeta,w]$组成的曲线γ满足

$$\|\gamma\|>\rho(z,w)$$

(见定理7.3.1)。于是有如下定理。

定理7.3.2 若z和w是双曲平面中不同的点，则当且仅当$\zeta\in[z,w]$时

$$\rho(z,w)=\rho(z,\zeta)+\rho(\zeta,w)$$

在结束本节之前，我们还要介绍一些术语。首先，点z_1，z_2，…共线是指它们位于同一条测地线上。每条测地线都有两个端点，即位于无穷远圆周上的那两个点。线段的概念自然可以推广使之包含测地线本身；这就是说即使α和β是无穷远圆周上的点，(α,β)也总是表示以α和β为端点的测地线段。从z点出发的半直线是线段(z,α)，其中α是无穷远圆周上的点；过z点的每条测地线(α,β)恰好确定两条从z点出发的射线$[z,\alpha)$和$[z,\beta)$。

定义7.3.3 设L_1和L_2是不同的测地线。我们称L_1与L_2平行当且仅当它们恰有一个公共端点；若L_1和L_2没有公共端点，则当$L_1\cap L_2\neq\phi$时称为相交，当$L_1\cap L_2=\phi$时称为不相交。

注：这些术语在模型Δ中的图例见图7.3.1。请注意，这些术语并不是标准的，即非通用的。由于许多双曲几何性质是基于对这三种互不相容的可能性的讨论上的，因此我们

宁可采用这种特殊的描述性术语。

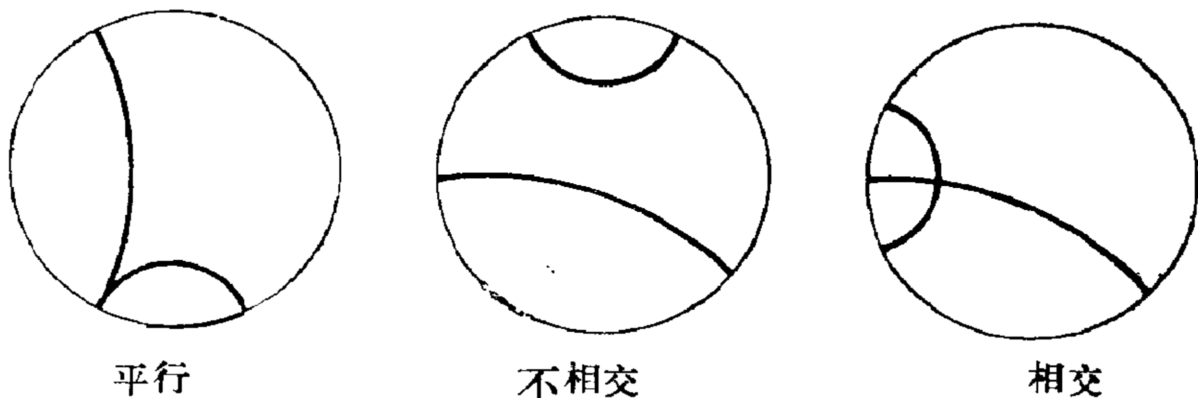


图 7.3.1

习题 7.3

1. 设$w=u+iv$，$w'=iv$和$z=ri$都是H^2中的点。求证当且仅当$w=w'$时，式

$$\rho(\omega,z)\geq\rho(\omega',z)$$

中的等号成立。并证明定理7.3.2。

§ 7.4 等距映射

本节的目的是找出双曲平面的所有等距映射。设z，w和ζ是H^2中不同的点，ζ在z和w之间。从定理7.3.2可得到一个直接的推论：对于任何等距映射ϕ，点$\phi(\zeta)$必在$\phi(z)$与$\phi(w)$之间，从而ϕ把线段〔z,w〕映射成线段〔$\phi(z)$，$\phi(w)$〕；进而ϕ把双曲直线映射成双曲直线。

任意给定一个等距映射ϕ，必存在等距映射

$$g(z)=\frac{az+b}{cz+d}\qquad(ad-bc>0)$$

使得$g\phi$保持正虚轴L不变（只需选取g把$\phi(L)$映射成L即可）。不妨设$g\phi$以i为不动点且使射线(i,∞)，$(\mathrm{i},0)$保持不变（必要时可利用等距映射$z\mapsto kz(k>0)$和$z\mapsto -1/z$使之满足这一条件）。作为（7.2.3）式的直接推论知，L上的每一点都是$g\phi$的不动点。

取定H^2内任意一点z，命

$$z=x+\mathrm{i}y,\qquad g\phi(z)=u+\mathrm{i}v$$

对于所有的正数t，有

$$\begin{aligned}\rho(z,\mathrm{i}t)&=\rho(g\phi(z),g\phi(\mathrm{i}t))\\&=\rho(u+\mathrm{i}v,\mathrm{i}t)\end{aligned}$$

故由定理7.2.1（iii）有

$$[x^2+(y-t)^2]v=[u^2+(v-t)^2]y$$

因此式对所有的正数t都成立，而有$y=v$，$x^2=u^2$；于是

$$g\phi(z)=z\qquad \text{或}\, g\phi(z)=-\bar{z}$$

等距映射即是连续映射，而由连续性即可推出上述两式中只有一式对H^2中所有的z都成立；例如，在开第一象限中满足$g\phi(z)=z$的点z的集合是该象限中既开且闭的集。这就证明了下一个定理。

定理7.4.1　（H^2,ρ）的等距映射群是所有形如

$$z\mapsto\frac{az+b}{cz+d},\qquad z\mapsto\frac{a(-\bar{z})+b}{c(-\bar{z})+d}$$

的映射所成的群，其中a,b,c,d是实数，并且$ad-bc>0$。该等距映射群也是由关于双曲直线的反射变换生成的群。

对于模型Δ有类似的结果；此处的等距映射是

$$z \mapsto \frac{az+\bar{c}}{cz+\bar{a}}, \qquad z \mapsto \frac{a\bar{z}+\bar{c}}{c\bar{z}+\bar{a}}$$

其中 $|a|^2-|c|^2=1$。

顺便提一下，若

$$g(z)=\frac{az+\bar{c}}{cz+\bar{a}}, \qquad |a|^2-|c|^2=1$$

则由（7.2.4）式可推出如下有用的表示式

$$|c|=\sinh\frac{1}{2}\rho(0,g0) \tag{7.4.1}$$

$$|a|=\cosh\frac{1}{2}\rho(0,g0) \tag{7.4.2}$$

故再次得到

$$\|g\|^2=2\cosh\rho(0,g0)$$

当然，若h是（H^2,ρ）的一个等距映射，则

$$\|h\|^2=2\cosh\rho(\mathrm{i},h\mathrm{i})$$

其证明可通过应用定理7.2.1（ii）（或定理4.2.1）作一些初等计算而得到。

习题 7.4

1．设z_j，$w_j(j=1,2,3)$是H^2中的点。试证明：存在等距映射g满足$g(z_j)=w_j$（$j=1,2,3$)的充分必要条件是，对所有的i和j均有

$$\rho(z_i,z_j)=\rho(w_i,w_j)$$

§ 7.5 凸　集

双曲平面的子集E称为凸集。当且仅当对E中每一对点z和w均有$[z,w]\subset E$。容易验证关于凸性的如下事实。

(1)若E是凸集，则对于每个等距映射g，$g(E)$也是凸集。

(2)若E是凸集，则E^0(E的内部)和$\tilde{E}$也是凸集。

(3)若$E_1, E_2, \cdots$是凸集且$E_1\subset E_2\subset\cdots$，则$\cup E_n$是凸集。

(4)若每个E_α是凸集，则$\cap_\alpha E_\alpha$也是凸集。

由定义知测地线也是凸集。映射$iy\mapsto \log y$是双曲测地线$\{iy: y>0\}$到欧氏测地线$\{x+iy: y=0\}$的同胚，它保持"之间"的关系不变。我们推出：线段是双曲测地线的仅有的凸子集。

测地线的余分支称为开半平面，任何一个开半平面都是凸集。为举例说明$Klein$模型的应用，设$F: \Delta\to\Delta$是7.1节中所描述的映射。它把$Poincaré$模型(Δ,ρ)的测地线映射成Δ中的欧氏线段，因而Δ的子集E在$Poincaré$模型中是凸集，当且仅当$F(E)$是欧氏意义下的凸集。特别的，$Poincaré$模型中的半平面被映射为一个欧氏半平面与Δ的交集，这确是一个欧氏意义下的凸集。因此，$Klein$模型使我们能够把双曲凸性转化为更加熟悉的欧氏凸性。

由(2)知，闭半平面是凸集。若$E_\alpha(\alpha\in A)$是任意一族半平面(开的或闭的)，则$\cup E_\alpha$的余集是半平面的交，从而此余集为凸集。例如，双曲圆盘D必是凸集，因为它是如图7.5.1所示的那种阴影半平面的并集的余集。

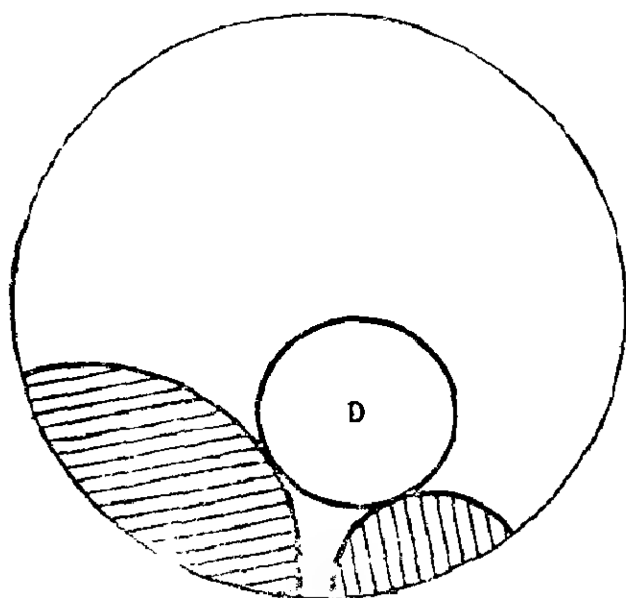


图 7.5.1

还有另外两个性质类似的例子以后要用到。我们称与无穷远圆周相切的欧氏圆周的内部为极限圆域。通过取模型 H^2 并以 ∞ 作为切点，不妨设极限圆域为 $\{x+iy:\ y>t\}$ 。这一区域是凸集，因为它是所有形如 $\{z\in H^2:\ |z-x_0|\leqslant t\}$ （x_0取遍一切实数）的半平面的并集的余集。极限圆域的边界称为极限圆周。

所谓超圆域，是指经等距变换可化为如下形式的区域：对于某个$\theta\in(0,\ \pi/2)$

$$\{\ z\in H^2:\ |\arg(z)-\frac{\pi}{2}|<\theta\ \}$$

以后将会看到引入这类区域的重要意义。这种区域是凸的，因为它是形如

$$\{\ z\in H^2:\ |z-x_0|\leqslant x_0\cos\theta\ \},\ x_0\in \mathbf{R}$$

的半平面的并集的余集。超圆域的边界称为超圆。

最后，我们给出闭凸集的特征。当且仅当E中每一点z

都有一个开邻域N使得$E\cap N$是凸集时，称集E为局部凸集。凸性和局部凸性的概念对于欧氏空间和双曲空间都是有意义的，并且容易推广到闭双曲平面。

定理7.5.1 设P是欧氏平面或闭双曲平面。P的闭子集E是凸集，当且仅当E是连通的局部凸集。

〔证〕 若结论在P是欧氏平面时成立，那末，Poincaré模型和Klein模型间的关系表明结论在P是闭双曲平面时也成立。于是，只需证明若E是$\mathbf{R}^2$的一个局部凸的连通闭集 则E是凸集即可（其逆命题是平凡的）。

说E中的两个点是折线连通的，如果这两个点能够用E中的折线相连接。这是一个等价关系。E的局部凸性意味着每个等价类都是E中的相对开集。因E是连通集，故只存在一个等价类，从而E中任何两个点都可以用E中的折线连接。所以，只要证明当$[u,v]$，$[v,w]$包含于E时线段$[u,w]$也包含于E就足够了。因当u,v,w共线时，结论是平凡的，故不妨假定这些点不共线。

对于三个点a,b,c，以$T(a,b,c)$表示以a,b,c为顶点的三角形（即点a,b,c的凸包）。设K是$[u,v]$中满足如下性质的点x的集合：存在(v,w)中的点y，使得$T(v,x,y)\subset E$。由于E点在v局部凸，K必含有某个长度大于零的区间。显然，K是形如$[v,x_0)$或$[v,x_0]$的区间，其中$x_0\neq v$。我们来证明$K=[v,u]$。

选取x_0的一个邻域N使得$E\cap N$是凸集，然后再选取$[v,x_0)\cap N$中的x_1和$[x_0,u]\cap N$中的x_2；参看图7.5.2。

因$x_1\in K$，故存在(v,w)中的某个y_1满足

$$T(v,x_1,y_1)\subset E$$

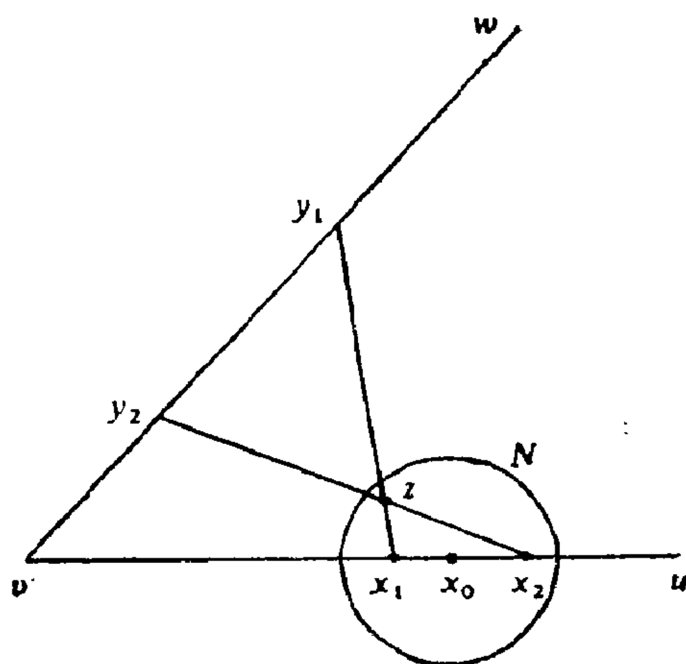


图 7.5.2

选取$N\cap(x_1,y_1)$中的一点z；由$E\cap N$是凸集而有

$$T(z,x_1,x_2)\subset E$$

对于如图7.5.2所示的y_2，又有

$$T(v,x_2,y_2)\subset T(v,x_1,y_1)\cup T(x_1,x_2,z)$$
$$\subset E$$

故$x_2\in K$。这表明$x_0\in K$且$x_0=u$，从而$K=[v,u]$。由$u\in K$知，必存在(v,w)中的某点y使得$T(v,u,y)\subset E$。

现在考虑$[v,w]$中满足$T(v,u,y)\subset E$的点y的集合K_1。同上，K_1也是某个线段$[v,y_0)$或$[v,y_0]$。由E是闭集而知$K_1=[v,y_0]$。上一段的论证（u,v,w代之以u,y_0,w）表明$y_0=w$，故$w\in K_1$且有

$$T(v,u,w)\subset E$$ □

习题 7.5

1. 设z，z'，w，w'是H^2中的点。求证：若$w\in[z, z']$，则

$$\rho(\omega,\omega')\leqslant\max\{\rho(\omega,z),\rho(\omega',z)\}$$

并以分析的方法证明双曲圆盘是凸集。

2. 构造H^2的一个子集E，使其具有连通性和局部凸性但不是凸集(参看定理7.5.1)。

3. 证明两个集

$$\{x+iy\in H^2: a<x<b, y<c\}$$
$$\{x+iy\in H^2: a<x<b, y>c\}$$

中只有一个是凸集。

§ 7.6 角

对于双曲平面中的角，我们按照7.1节中的既定方针去处理，即用欧氏几何的术语来表述双曲几何的角。在双曲几何中，所谓在z点的一个角就是从z点出发不计先后顺序的一对射线(L,L')。设(L,L')是在z点的一个角，并假定L和L'不在同一条测地线上，则$L'-\{z\}$同由L所确定的测地线L^*不相交；这推出L^*余集的两个开半平面中的一个(设为Σ')包含$L'-\{z\}$。类似的，L'余集中的某个开半平面Σ包含$L-\{z\}$。现在我们定义角(L,L')的内部为$\Sigma\cap\Sigma'$。容易看出(L,L')的内部是$L\cup L'$的余集的一个分支，余集的另一个分支称为角(L,L')的外部

如果L和L'位于同一条测地线上，那末，或者$L\cup L'$是一条测地线（这时内部和外部就没有一个选择的标准了），

或者$L=L'$（在这种情形下可规定其内部为空集，其外部是L的余集）。

给定在点z的一个角(L,L')，若L和L'确定不同的测地线，则角(L,L')的内部是凸集，因为它是半平面的交集。作为它的余集，角的外部不可能是凸集，否则连接$L-\{z\}$和$L'-\{z\}$上的点的线段将既属于(L,L')的内部又属于(L,L')的外部。当然，我们可以用通常的方法来度量在z点的内角和外角，并且其角度分别位于区间$[0,\pi)$和$(\pi,2\pi]$之中。

§ 7.7 三角形

设z_1,z_2,z_3是双曲平面中不共线的三个点，L_2和L_3是从z_1出发分别经过z_2和z_3的两条射线。则(L_2,L_3)是在z_1点的一个角；以A_1表示其内部。设A_2和A_3是按类似的方式确定的在点z_2和z_3处的角的内部。这些记号只需看一下图7.7.1就很容易理解。顺便提一下，由凸性，知$(z_2,z_3)\subset A_1$（参看7.6节）。

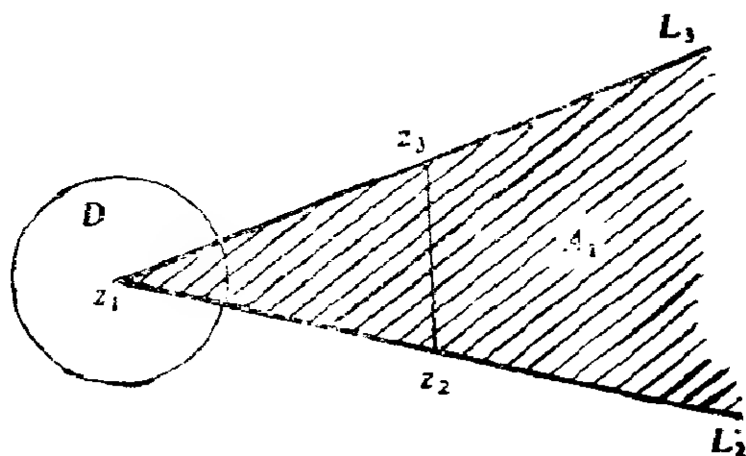


图 7.7.1

定义7.7.1 集$A_1\cap A_2\cap A_3$称为由z_1,z_2,z_3三点所确定的**三角形**，记为$T(z_1,z_2,z_3)$。

z_j，$[z_i,z_j]$和A_j分别是三角形$T(z_1,z_2,z_3)$的**顶点**，**边**和**角**。$T(z_1,z_2,z_3)$的每个角都是内角，因而都小于π。为了简便起见，我们把$T(z_1,z_2,z_3)$简单地记为T。显然，由每个A_j是凸集可知T也是凸集。此外，A_j还是依如下意义的T的角：即对于任何以z_j为中心的充分小的开圆盘D均有

$$D\cap T=D\cap A_j$$

为验明此事，设H_j是包含z_j且使其余两个顶点都在它的边界上的半平面。从而（当$j=1$，$D\subset H_1$时）有

$$\begin{aligned}D\cap A_1&=(D\cap H_1)\cap(H_2\cap H_3)\\&=D\cap(H_2\cap H_3)\cap(H_3\cap H_1)\cap(H_1\cap H_2)\\&=D\cap T\end{aligned}$$

其次，∂T由下式确定

$$\partial T=[z_1,z_2]\cap[z_2,z_3]\cap[z_3,z_1]$$

作为一条若当曲线它可以参数化，记其内部为T_0。因$\partial T\subset\widetilde{H}_1$，故$T_0\subset H_1$。同样的论证对$H_2$和$H_3$也成立，从而

$$T_0\subset H_1\cap H_2\cap H_3=T$$

由T是连通集（事实上是凸集）并且与∂T不相交知，它必位于∂T的内部或外部。但T与T_0相交，故$T\subset T_0$，从而$T=T_0$。

在用公理化系统叙述的双曲几何学中，有时有必要把如下事实作为一个公理：从z_1出发且经过$T(z_1,z_2,z_3)$内一点w的射线L必与边(z_2,z_3)相交。在我们的情形下不难证明这一事实，显然作为连通集的线段$L-\{z_1\}$与∂T的内部

有交点（w），并且不可能同〔z_1,z_2〕或〔z_1,z_3〕相交；又因 $L-\{z_1\}$ 无界，它的闭包与无穷远圆周相交，故必与 ∂L 相交。

下一个结果在推导三角公式时常常用到（故有必要给出与这些公式无关的证明）。

定理7.7.2 若L是包含T的最长边（设为〔z_2,z_3〕）的测地线，则过z_1点且垂直于L的测地线L_1必与L在〔z_2，z_3〕中一点w处相交。

〔证〕 不妨设L是正虚轴，于是 $w=\mathrm{i}\,|z_1|$（参看图7.7.2）。容易看出

$$\rho(z_1,z_2)\geqslant\rho(w,z_2)$$

类似的有

$$\rho(z_1,\ z_3)\geqslant\rho(w,\ z_3)$$

（参看7.20节，该处未用到三角学）。由〔z_2,z_3〕是最长边而推出

$$\max\{\rho(z_2,\ w),\rho(z_3,w)\}\leqslant\rho(z_2,\ z_3)$$

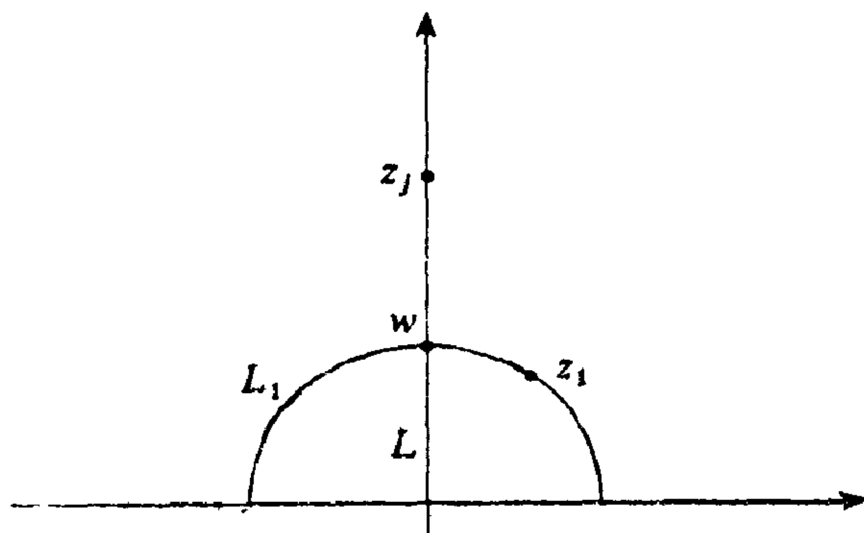


图 7.7.2

点z_2，z_3，w是共线的，并且其中必有一个点位于另外两个点之间。应用定理7.3.2知w必位于z_2和z_3之间（或等于两者之一）。

本节的大部份内容可以毫无困难地推广到有一些顶点或全部顶点在无穷远圆周上的情形。值得注意的是定理7.7.2不再成立（考虑z_2在无穷远圆周上而z_3不在无穷远圆周上的情形）。

习题 7.7

1．试证明：在双曲几何中，三角形的三个顶点可能但不必位于一个圆周上。

2．试证明：三角形T的直径，即

$$\sup\{\rho(z,w):z,w\in T\}$$

等于其最长边的长度（参看题7.5.1）。

§7.8 记　号

后面的六节将集中讨论双曲三角形，为方便起见，我们采用一套标准的记号，这套记号使我们可以比较容易地表示各种三角关系。三角形T的顶点记作v_a，v_b，v_c；它们的对边的长度分别为a，b，c；这些顶点处的内角为α，β，γ。这套记号是容易接受的，读者只需看一下图7.8.1便可一目了然。由等距映射使长度和角度保持不变可知，三角公式在等距映射下也保持不变。

我们允许一个三角形的一些顶点或全部顶点位于无穷远

圆周上。例如，若v_a是在无穷远圆周上，则

$$a=0,\quad b=c=+\infty$$

若有两个顶点在无穷远圆周上，则三条边都无限长。

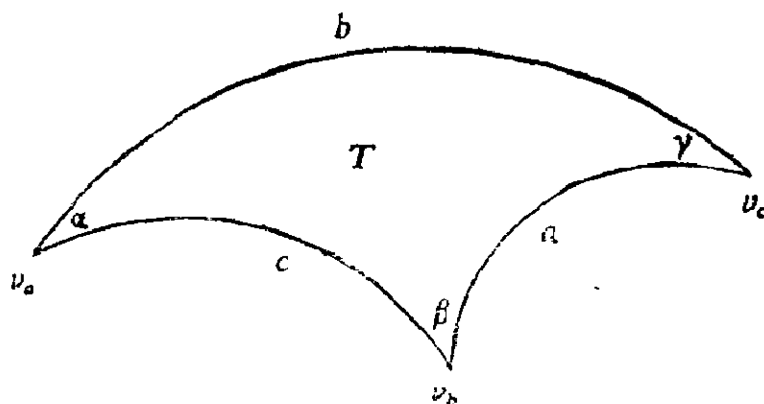


图 7.8.1

习题 7.8

1．设T_1和T_2是两个三角形，其所有的边都无限长。试证明存在一个等距映射把T_1映射成T_2。

§ 7.9 平 行 角

平行角是一个经典的术语，是具有两条平行边且角度为$\alpha, 0, \pi/2$的三角形所满足的三角关系。这样的三角形只有两个参数，即角度α和有限边的长度b。

定理7.9.1 若T是一个三角形，其三个角度为α，$0, \pi/2$（$\alpha\neq 0$），则

(i) $\sinh b \tan\alpha = 1$

(ii) $\cosh b \sin\alpha = 1$

(iii) $\tanh b \sec \alpha = 1$

〔证〕 我们在H^2中讨论之，且不妨假定

$$v_c = \mathrm{i} \qquad v_b = \infty, \qquad v_a = x + \mathrm{i}y$$

其中$x^2 + y^2 = 1$；参看图7.9.1。因$y = \sin\alpha$，由定理7.2.1 (ii)即推出(ii)式。剩下的两个公式与(ii)式等价。 □

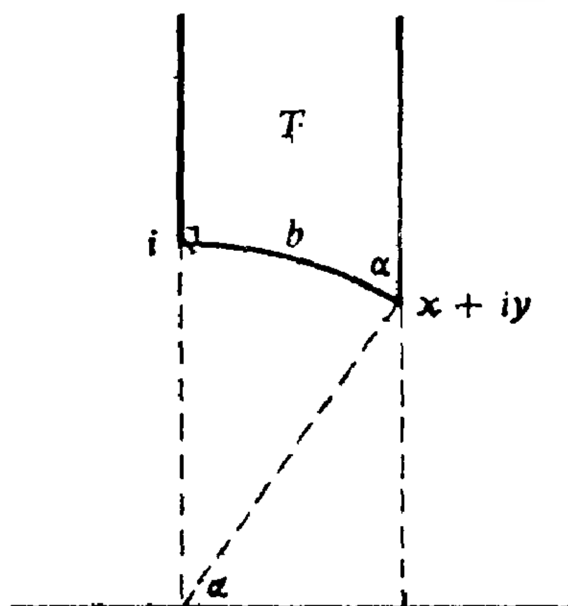


图 7.9.1

§ 7.10 一个顶点在无穷远的三角形

考虑角度为$\alpha, \beta, 0$的三角形，其中α和β都不为0；则有

$$a = b = +\infty, \qquad 0 < c < +\infty$$

我们来确定α, β和c之间的关系。

定理7.10.1 对角度为$\alpha, \beta, 0$的任一三角形，必有

(i) $$\cosh c = \frac{1 + \cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}$$

(ii) $$\sinh c=\frac{\cos\alpha+\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}$$

〔证〕 仍在H^2中讨论且取$v_c=\infty$。不妨设v_a和v_b位于圆周$|z|=1$上，且

$$v_a=\exp(i\theta),\qquad v_b=\exp(i\phi)$$

其中$0<\theta<\phi<\pi$。因此有$\alpha=\theta$，$\beta=\pi-\phi$。因

$$\cosh c=\cosh\rho(v_a,v_b)$$

故从定理7.2.1即可推出(i)式。我们把（ii）式留给读者去验证。 □

§ 7.11 直角三角形

现在考虑角度为$\alpha,\beta,\pi/2$的三角形。经适当的等距映射可假定

$$v_c=i,\ v_b=ki,\ v_a=s+it$$

其中$k>1$，s和t是正数且满足$s^2+t^2=1$（参看图7.11.1）。

首先讨论三边间的关系；这就是*Pythagoras*定理(商高定理）的双曲形式。

定理7.11.1 对角度为$\alpha,\beta,\pi/2$的任一三角形，必有

$$\cosh c=\cosh a\cosh b\tag{7.11.1}$$

〔证〕 应用定理7.2.1（ii），我们有

$$\cosh c=\frac{1+k^2}{2kt}\qquad \cosh b=\frac{1}{t}$$

$$\cosh a=\frac{1+k^2}{2k}\qquad □\tag{7.11.2}$$

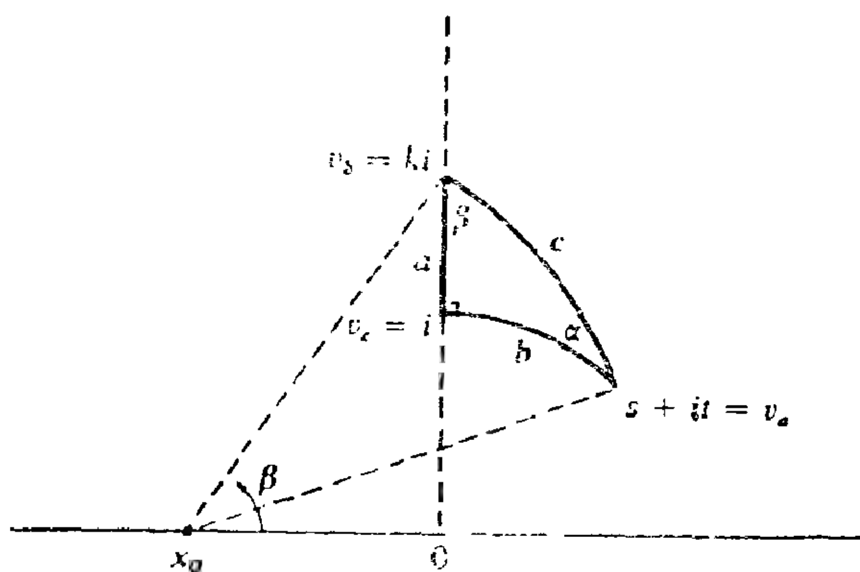


图 7.11.1

顺便指出，我们还可得到关系式

$$\tanh b = s \tag{7.11.3}$$

其次来考虑两边一角的关系。

定理7.11.2 对角度为$\alpha, \beta, \pi/2$的任一三角形，必有

(i) $\tanh b = \sinh a \tan \beta$

(ii) $\sinh b = \sinh c \sin \beta$

(iii) $\tanh a = \tanh c \cos \beta$

〔证〕 若过v_a和v_b的测地线的欧氏圆心为x_0。则由v_a和v_b到x_0的距离相等而知

$$k^2 = 1 - 2x_0 s$$

这表明$x_0 < 0$. 以$x_0, 0, ki$为顶点的欧氏三角形在x_0点的角为β。因此.

$$\tan \beta = \frac{k}{|x_0|}$$

$$= \frac{2sk}{k^2-1}$$

从而由(7.11.2)和(7.11.3)式即可推出(i)式。

从(i)式和(7.11.1)式中消去a即得(ii)式；从(i)和(ii)式中消去b即得(iii)式。 □

最后讨论两角一边的关系。

定理7.11.3 对角度为$\alpha, \beta, \pi/2$的任一三角形，必有

(i) $\cosh a \sin \beta = \cos \alpha$

(ii) $\cosh c = \cot \alpha \cot \beta$

［证］ 由定理7.11.2 (i) 推出

$$\sinh a \tan \beta = \tanh b$$

$$\sinh b \tan \alpha = \tanh a$$

消去b即得(i)式。

要想证明 (ii)，只需从 (7.11.1) 式，已证的 (i) 式及其经交换a和b，α和β的位置所得的恒等式中消去$\cosh a$和$\cosh b$即可。 □

§ 7.12 正弦定律和余弦定律

现在考虑一般的双曲三角形，其三边为a, b, c，三边所对的角为α, β, γ。假定α, β, γ都是正数(因而a, b, c都是有限的)，我们来证明如下结果。

正弦定律

$$\frac{\sinh a}{\sin \alpha} = \frac{\sinh b}{\sin \beta} = \frac{\sinh c}{\sin \gamma}$$

余弦定律 I

$$\cosh c = \cosh a \cosh b - \sinh a \sinh b \cos \gamma$$

余弦定律 Ⅱ

$$\cosh c = \frac{\cos \alpha \cos \beta + \cos \gamma}{\sin \alpha \sin \beta}$$

应当注意第二个余弦定律的存在性，因为在欧氏几何中没有类似的命题。在双曲几何中，此定律意味着：如果两个三角形的角相同，则存在等距映射把一个三角形映射成另一个三角形。

［余弦定律Ⅰ的证明］　我们利用模型Δ，且不妨假设$v_c = 0$，$v_a > 0$（参看图7.12.1）。

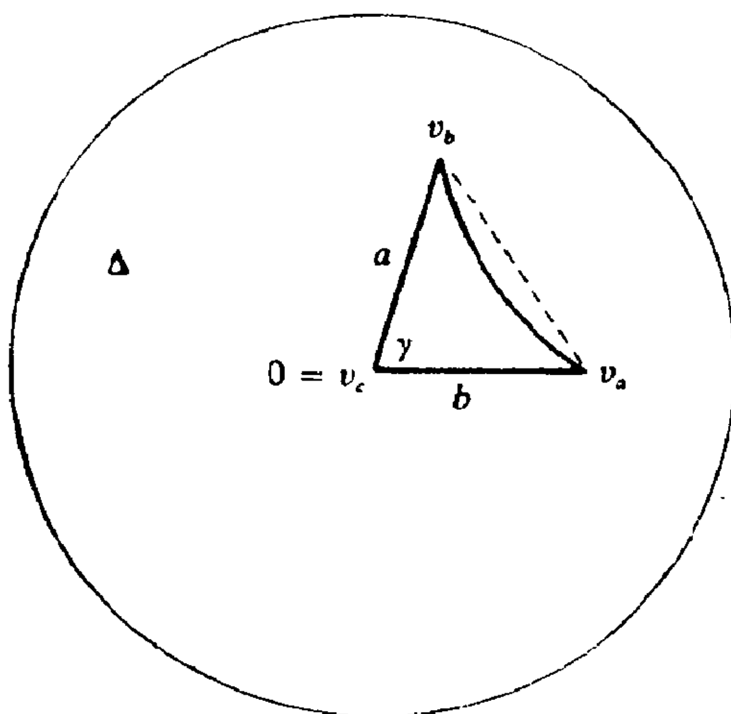


图 7.12.1

注意到

$$v_a = \tanh \frac{1}{2} \rho(0, v_a)$$

$$= \tanh \frac{b}{2} \tag{7.12.1}$$

类似地有

$$v_b = e^{i\gamma} \tanh \frac{a}{2} \tag{7.12.2}$$

由（7.2.4）式，我们有

$$\cosh c = 2\sinh^2\left[\frac{1}{2}\rho(v_a, v_b)\right] + 1$$

$$= \frac{2|v_a - v_b|^2}{(1-|v_a|^2)(1-|v_b|^2)} + 1$$

应用欧氏余弦定律，$|v_a - v_b|^2$可用$|v_a|$，$|v_b|$和$\cos\gamma$表达，再应用（7.12.1）和(7.12.2)式经化简即推出所要求证的结果。 □

〔正弦定律的证明〕　应用余弦定律Ⅰ，得

$$\left(\frac{\sinh c}{\sin\gamma}\right)^2 = \frac{\sinh^2 c}{1 - \left(\frac{\cosh a\cosh b - \cosh c}{\sinh a \sinh b}\right)^2}$$

只要证明了等式的右端关于a, b, c对称，正弦定律便可得以证实；为此，只需证明

$$(\sinh a \sinh b)^2 - (\cosh a \cosh b - \cosh c)^2$$

对称。而后者的对称性可通过用$\cosh^2$表达$\sinh^2$看出。

〔余弦定律Ⅱ的证明〕　为了简单起见，我们以A表示$\cosh a$，B和C是类似的记号。由余弦定律Ⅰ推出

$$\cos\gamma = \frac{AB - C}{(A^2-1)^{\frac{1}{2}}(B^2-1)^{\frac{1}{2}}}$$

故有

$$\sin^2\gamma = \frac{D}{(A^2-1)(B^2-1)}$$

其中

$$D = 1 + 2ABC - (A^2 + B^2 + C^2)$$

关于A, B,C对称。由$\sin^2\gamma$的表达式知$D\geqslant 0$。

显然，将分式

$$\frac{\cos\alpha\cos\beta + \cos\gamma}{\sin\alpha\sin\beta}$$

的分子和分母同乘以

$$(A^2-1)^{\frac{1}{2}}(B^2-1)^{\frac{1}{2}}(C^2-1)$$

便得到

$$\frac{\cos\alpha\cos\beta + \cos\gamma}{\sin\alpha\sin\beta}$$

$$= \frac{[(BC-A)(CA-B) + (AB-C)(C^2-1)]}{D}$$

$$= C$$ □

习题 7.12

1．对于一个一般的三角形，试证明：当且仅当$\alpha\leqslant\beta\leqslant\gamma$时$a\leqslant b\leqslant c$[利用正弦定律和定理7.13.1的推论]。

2．试证明：当且仅当$\alpha=\beta=\gamma$时一个三角形才为等边三角形；而此时，还有

$$2\cosh\frac{a}{2}\sin\frac{\alpha}{2} = 1$$

3. 对于一个一般的三角形，试证明：当且仅当$b=c$时在v_a点的角平分线包含$[v_b, v_c]$的中点（等腰三角形）。

4. 试证明：当且仅当T_1和T_2的角度相同时（或边长相同时）存在合同映射把三角形T_1映射为三角形T_2。

§ 7.13 三角形的面积

定理7.13.1 对于角度为α,β,γ的任一三角形T，有

$$h-\text{area}(T)=\pi-(\alpha+\beta+\gamma)$$

推论 双曲三角形的三角之和小于π。

[证] 先设$\gamma=0$。我们不妨设$v_c=\infty$，v_a和v_b位于$|z|=1$上。从图7.13.1知

$$h-\text{area}(T)=\int_{\cos(\pi-\alpha)}^{\cos\beta}\left(\int_{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}^{\infty}\frac{dy}{y^2}\right)dx$$

$$=\pi-(\alpha+\beta)$$

这就是当$\gamma=0$时所要证的结果。一般来说，任何一个三角形都

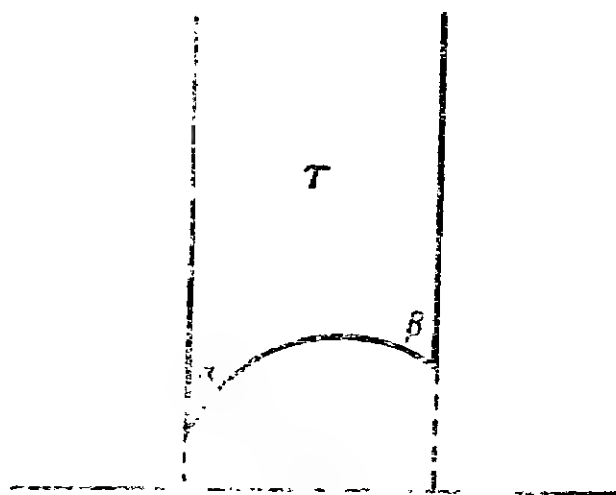


图 7.13.1

是两个这样的三角形之差（从v_a点引射线过v_c点交无穷远圆周于一点w，考虑三角形$T(v_a, v_b, w)$），故容易推出在一般情形下的结论。 □

§ 7.14 内 切 圆

这是双曲三角学的最后一节，更仔细的讨论留给读者去作。

定理7.14.1 三角形T的三条角平分线交于T内一点ζ。

［证］ 不妨设γ是最小的角，故有$\gamma<\pi/2$在v_a和v_b点作角平分线，它们必交于T内一点ζ（参看7.7节）。如图7.14.1定义γ_1和γ_2。因$\alpha/2$，$\beta/2$，γ_1和γ_2都小于$\pi/2$，故可从ζ点向三边引垂线得到三点w_a, w_b, w_c（如图7.14.1）。这些点必位于T的开边（即除去端点的边）上。

将正弦定律应用于以$[\zeta, v_b]$为边的两个三角形上，得到

$$\rho(\zeta, w_c) = \rho(\zeta, w_a)$$

若以w_b代替w_a，则同样的结果仍成立，因而点w_a, w_b, w_c位于以ζ为圆心的一个圆周上。由基本的三角关系而知$\gamma_1 = \gamma_2$。 □

称以ζ为圆心且过w_a, w_b, w_c三点的圆周为T的内切圆。

定理7.14.2 T的内切圆半径R满足

$$\tanh^2 R = \frac{\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-1}{2(1+\cos\alpha)(1+\cos\beta)(1+\cos\gamma)}$$

［证］ 若设$x = \rho(v_a, w_c)$，$y = \rho(w_c, v_b)$，则

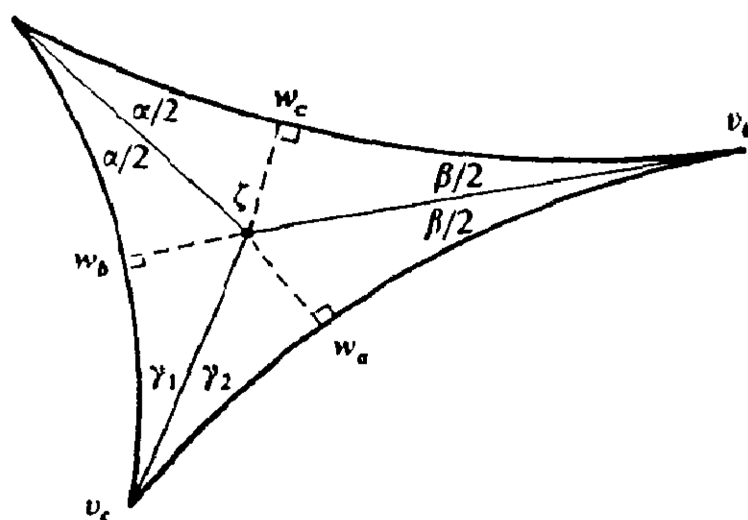


图 7.14.1

$$\frac{\cos\alpha\cos\beta+\cos\gamma}{\sin\alpha\ \sin\beta}=\cosh x\ \cosh y+\sinh x\ \sinh y$$

从而有

$$[(\cos\alpha\cos\beta+\cos\gamma)-(\sin\alpha\ \sin x)(\sin\beta\ \sinh y)]^2$$
$$=[(1-\mathrm{coc}^2\alpha)+\sin^2\alpha\ \sinh^2 x][(1-\cos^2\beta)+\sin^2\beta\ \sinh^2 y]$$

由恒等式

$$\sin\theta=(1+\cos\theta)\tan\frac{\theta}{2}$$

和关系式

$$\tanh R=\sinh x\tan\frac{\alpha}{2}$$

推出

$$\sin\alpha\ \sinh x=(1+\cos\alpha)\tanh R$$

对于β，y，R有类似的等式。作代换，经化简即得所求证的结

果。 □

下面的例子很有意思。

例7.14.3 对于 $(0,\pi)$ 中每个α，我们可以构造一个三角形T使它的角度为$\alpha,0,0$。于是

$$4\tanh^2 R=\frac{1}{2}(1+\cos\alpha)$$

$$=\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

$$=\sin^2\left[\frac{1}{2}\text{h-area}(T)\right]$$

在欧氏几何中，一个三角形可能面积很大而内切圆很小。下一个结果表明在双曲几何中会出现很不相同的情况；其证明可参看〔10〕。

定理7.14.4 *T的内切圆半径R满足*

$$\tanh R\geqslant\frac{1}{2}\sin\left[\frac{1}{2}\text{h-area}(T)\right]$$

并且对于h-area(T)的每个值，这个下界都是最佳的。

例7.14.3就表明了这个下界是最佳的。

§7.15 多边形的面积

多边形P是闭Jordan曲线

$$[z_1,z_2]\cup[z_2,z_3]\cup\cdots\cup[z_{n-1},z_n]\cup[z_n,z_1]$$

的内部。多边形在z_j的内角θ_j是由$D\cap P$确定的角，D是以z_j为心的所有充分小的圆盘。顺便指出，θ_j不必是P在z_j点的

两条边的内角；而当且仅当$0<\theta_j<\pi$时才与由边确定的内角一致。我们允许顶点落在无穷远圆周上；如果z_j是一个这样的无穷远顶点，则$\theta_j=0$。

定理7.15.1 *若P是以$\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_n$为内角的任一多边形，则*

$$\text{h-area}(P)=(n-2)\pi-(\theta_1+\cdots+\theta_n)$$

［证］ $n=3$的情形已在7.13节中作过证明，因此通过把多边形分成n-2个三角形而知结论对于凸多边形也成立(细节从略）。我们有必要明确地指明定理15.1对所有凸与非凸的多边形都适用。

对非凸多边形也是通过将其划分成三角形来证明；作这种划分并不十分容易，但我们可借助于$Euler$公式。首先延长P的每条边使之成为一条完整的测地线。这就把整个双曲平面划分成有限个互不重叠的凸多边形（因每一个都是半平面的交集，故为凸集）。我们只考虑这个划分中位于原多边形P中的那些多边形P_j。由凸性，每个P_j又可以分成一些三角形。这样，我们就把P分成了一些互不重叠的三角形T_j，而使得P的每个顶点是某个T_j的顶点并且T_j的每条边或者是另外某个T_i的边或者是P的某条边的一部份（且不是任何别的T_i的边）。

设P的这种三角剖分有N个三角形，E条边，V个顶点，且设有E_0条边在P的边上。由球面的$Euler$公式推出

$$(N+1)-E+V=2$$

由于N个三角形中的每一个都有三条边，按照不同方式计算边数得到等式

$$3N=E_0+2(E-E_0)$$

消去E，得

$$N-2V+E_0=-2 \tag{7.15.1}$$

现在来计算面积。在这种剖分的V个顶点中，n个是P的顶点，E_0-n个位于P的开边上，$V-E_0$个位于P的内部。由（7.15.1）式即有

$$\begin{aligned} \text{h-area}(P) &= \sum_{j=1}^{N} \text{h-area}(T_j) \\ &= N\pi-(\theta_1+\cdots+\theta_n)-(E_0-n)\pi \\ &\quad -(V-E_0)2\pi \\ &= (n-2)\pi-(\theta_1+\cdots+\theta_n) \end{aligned}$$

□

注：对于欧氏多边形有

$$(n-2)\pi=\theta_1+\cdots+\theta_n$$

§ 7.16 凸 多 边 形

我们来建立两个关于凸多边形的结果。第一个是关于一个多边形为凸多边形的充要条件；第二个是具有指定的角的凸多边形的存在性。

定理7.16.1 若P是以$\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_n$为内角的多边形，则当且仅当每个$\theta_j$均满足$0\leqslant\theta_j\leqslant\pi$时$P$是凸多边形。

这是定理7.5.1的直接推论。显然，定理7.15.1表明了存在以$\theta_1,\cdots,\theta_n$为内角的多边形的一个必要条件

$$\theta_1+\cdots+\theta_n<(n-2)\pi$$

事实上，对凸多边形而言这个条件也是充分的。

定理7.16.2 若$\theta_1,\cdots,\theta_n$是任意一个有序的n元数组，且满足$0\leqslant\theta_i<\pi$，$j=1,\cdots,n$。则存在一个多边形P，其内

角按环绕∂P的顺序依次为$\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_n$的充要条件是

$$\theta_1+\cdots+\theta_n\leqslant(n-2)\pi \tag{7.16.1}$$

事实上，我们将构造出一个多边形P使它不仅具有指定的角而且有一个与P的每一边都相切的内切圆。

［证］ 给定$\theta_1,\cdots,\theta_n$满足（7.16.1）式且每个θ_i都位于〔0,π）内。在Δ内作n个四边形$Q_1,\cdots,Q_n$，而每一个四边形都有一个顶点在原点（如图7.16.1所示）。长度d是一个待定的正数；顺便指出，Q_j由d和θ_j所确定（在相差关于原点的一个旋转的范围内）。显然，只要

$$\sum_{j=1}^{n}\alpha_j=\pi \tag{7.16.2}$$

即可作出所求的多边形P，它就是这些互不重叠的Q_j的并。

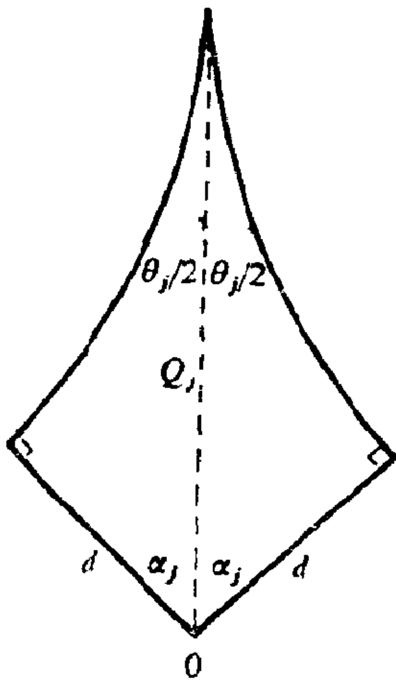


图 7.16.1

由定理7.11.3有

$$\sin\alpha_j=\frac{\cos\frac{\theta_j}{2}}{\cosh d} \qquad (7.16.3)$$

我们来考虑函数

$$g(t)=\sum_{j=1}^{n}\sin^{-1}\left(\frac{\cos\frac{\theta_j}{2}}{\cosh t}\right)$$

其中$t\geqslant o$，$\sin^{-1}$取〔$0,\pi/2$〕内的值。

显然，g是连续的减函数，并且当$t\to+\infty$时$g(t)\to 0$。由（7.16.1）式，又有

$$g(0)=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\pi-\theta_j}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}[n\pi-(\theta_1+\cdots+\theta_n)]$$

$$>\pi$$

因中值定理保证了满足$g(d)=\pi$的正数d的存在，从而知由（7.16.3）式所确定的α_j满足（7.16.2）式。 □

作为定理7.16.2的一个应用，容易看出：**当且仅当**$n\geqslant 5$**时，才存在所有内角都等于**$\pi/2$**的**n**边形**。

§ 7.17 四 边 形

定理7.16.2有一个直接推论：当且仅当$0\leqslant\phi<\pi/2$时，才存在角度为$\pi/2$，$\pi/2$，$\pi/2$，ϕ的四边形；这样的一个四边形如图7.17.1所示。这种四边形称为*Lambert*四边形。越

过一边作反射，即得到一个角度为$\pi/2$，$\pi/2, \phi, \phi$的四边形（如图7.17.2所示）；这种四边形称为*Saccheri*四边形，*G. Saccheri*在研究平行公设时曾采用过这种四边形。

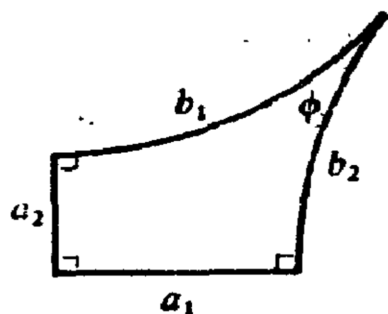


图 7.17.1

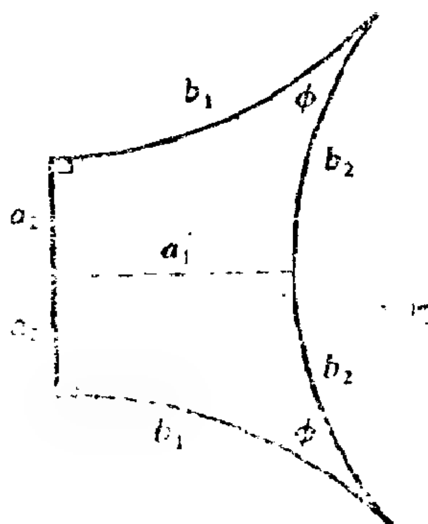


图 7.17.2

如图7.17.1所示，我们有如下定理。

定理7.17.1 (i) $\sinh a_1 \sinh a_2 = \cos\phi$

(ii) $\cosh a_1 = \cosh b_1 \sin\phi$

定理的证明要用到两个很有用的引理。

引理7.17.2 设L是Δ中的一条双曲测地线，作为欧氏圆弧设其圆心为ξ半径为r，设w是L上最接近原点的点。则

$$\sinh\ \rho(0,w) = \frac{1}{r}, \qquad \cosh\ \rho(0,w) = \frac{|\xi|}{r}$$

［证］ 显然，$|\xi| = |w| + r$，而正交性意味着$|\xi|^2 = 1 + r^2$。利用（7.2.4）式可求出$\sinh\frac{1}{2}\rho\ (0,w)$，从而得

$$\sinh\ \rho(0,w) = \frac{2|w|}{1-|w|^2} = \frac{1}{r}$$

cosh值可直接推出。 □

引理7.17.3 若L和L'是双曲平面中的两条测地线。则按L与L'不相交、平行和相交成ϕ角（$0\leqslant\phi\leqslant\pi/2$）三种情况，其反积$(L,L')$分别为

$$\cosh\rho(L,L'),\quad 1,\quad \cos\phi$$

〔证〕 不难看出，不相交的测地线有一条公共的正交测地线（参看7.22节），此时定义$\rho(L,L')$为这条正要线段在L和L'之间的长度。由不变量的常用论证方法，我们只需考虑以下三种情况。

(i) L和L'是H^2中的半圆周$|z|=R$和$|z|=r$；

(ii) L和L'是H^2中的半直线$x=0$，$x=x_1$；

(iii) L和L'是Δ的欧氏直径。

对每一种情况应用3.2节给出的关于(L,L')的公式即可推出所要证的结果。

〔定理7.17.1的证明〕 不妨设图7.17.1中的四边形的两条边a_1和a_2分别位于正实轴和正虚轴上。假定另外两条边b_1和b_2分别位于圆周

$$|z-\mathrm{i}v|=R,\quad |z-u|=r$$

上，其中u,v,r,R都是正实数。由引理7.17.2有

$$\sinh a_1\sinh a_2=\frac{1}{rR}$$

引理7.17.3即意味着

$$(L,L')=\cos\phi$$

而由3.2节有

$$(L,L')=\left|\frac{r^2+R^2-|u-\mathrm{i}v|^2}{2rR}\right|$$

$$= \frac{|r^2 + R^2 - u^2 - v^2|}{2rR}$$

$$= \frac{1}{rR}$$

最后一个等式是由于$u^2 = 1 + r^2$, $v^2 = 1 + R^2$。

为证明（ii），我们改变多边形的位置，使得具有角度ϕ的那个顶点位于原点，b_2边位于正实轴上（参看图7.17.3）。

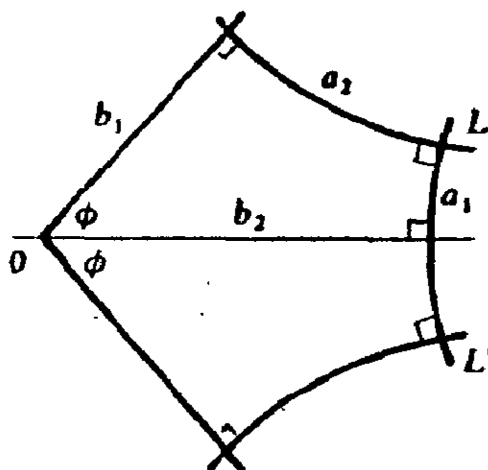


图 7.17.3

将这个四边形关于实轴作反射；设L是包含边a_2的测地线，L'是L关于实轴的反射。由引理7.17.3有

$$(L, L') = \cosh(2a_1) \qquad (7.17.1)$$

若L作为欧氏圆弧其圆心为$de^{i\phi}$，半径为r，则L'的圆心为$de^{-i\phi}$，半径也为r；且显然有

$$|de^{i\phi} - de^{-i\phi}| > 2r$$

于是由引理7.17.2有

$$(L, L') = \left| \frac{|de^{i\phi} - de^{-i\phi}|^2 - 2r^2}{2r^2} \right|$$

$$= \frac{2d^2\sin^2\phi - r^2}{r^2}$$

$$= 2\cosh^2 b_1 \sin^2\phi - 1$$

由此式与（7.17.1）式即推出（ii）式。 □

习题 7.17

1. 试由定理7.9.1直接推导出引理7.17.2（引理7.17.2是平行角公式的简单改写）。

§7.18 五 边 形

我们来考察如图7.18.1所示的五边形所存在的度量关系，其中$0 \leqslant \phi < \pi$。

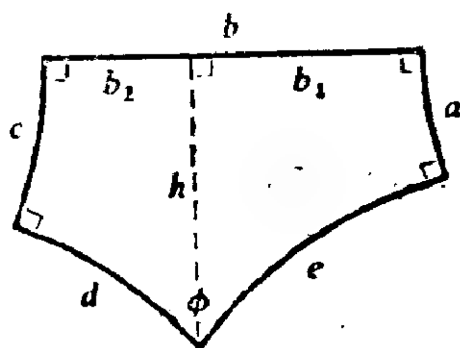


图 7.18.1

定理7.18.1 (i) $\cosh a \cosh c + \cos\phi$

$$= \sinh a \cosh b \sinh c$$

(ii) 若$\phi = \pi/2$，则

$$\tanh a \cosh b \tanh c = 1 \qquad (7.18.1)$$

$$\sinh a \ \sinh b = \cosh d \qquad (7.18.2)$$

〔证〕 容易看出，存在测地线过角ϕ所在的顶点并且与长度为b的边正交。设b_1和b_2是如图所示的长度，ϕ_1和ϕ_2是ϕ被该测地线分成的两个角，ϕ_1与长度为b_1的那条边位于该测地线的同侧。由定理7.17.1，我们有

$$\cosh a = \cosh h \sin\phi_1 \qquad \cosh c = \cosh h \sin\phi_2$$

$$\sinh a \ \sinh b_1 = \cos\phi_1 \qquad \sinh c \ \sinh b_2 = \cos\phi_2$$

这推出

$$\begin{aligned}(\cosh a \cosh c - \sin\phi_1\sin\phi_2)^2 &= (\cosh a \cosh c - \sin\phi_1\sin\phi_2)^2 - (\cosh a \sin\phi_2 \\ &\qquad - \cosh c \sin\phi_1)^2 \\ &= (\cosh^2 a - \sin^2\phi_1)(\cosh^2 c - \sin^2\phi_2) \\ &= (\sinh^2 a + \cos^2\phi_1)(\sinh^2 c + \cos^2\phi_2) \\ &= (\sinh^2 a \cosh^2 b_1)(\sinh^2 c \cosh^2 b_2)\end{aligned}$$

两端开方取正根即为

$$\cosh a \cosh c - \sin\phi_1\sin\phi_2 = \sinh a \sinh c \cosh b_1 \cosh b_2$$

由此式可直接推出 (i) 式，即

$$\begin{aligned}&\cosh a \ \mathrm{coh} c + \cos\phi \\ &= \cosh a \cosh c - \sin\phi_1\sin\phi_2 + \cos\phi_1\cos\phi_2 \\ &= \sinh a \ \sinh c(\cosh b_1\cosh b_2 + \sinh b_1\sinh b_2) \\ &= \sinh a \sinh c \cosh b\end{aligned}$$

在(i)式中命$\phi = \pi/2$即得(7.18.1)式。为证明(7.18.2)式，我们对b，c，d应用(7.18.1)式并从所得的表达式与(7.18.1)式中消去c即得(7.18.2)式。 □

§ 7.19 六 边 形

我们只考虑图7.19.1所示的直角六边形。连接 a_1和b_1边的端点形成一个四边形Q，可看出Q的每个内角都小于$\pi/2$。这推出a_1边和b_1边有一条公垂线，设其长度为t（如图所示）。

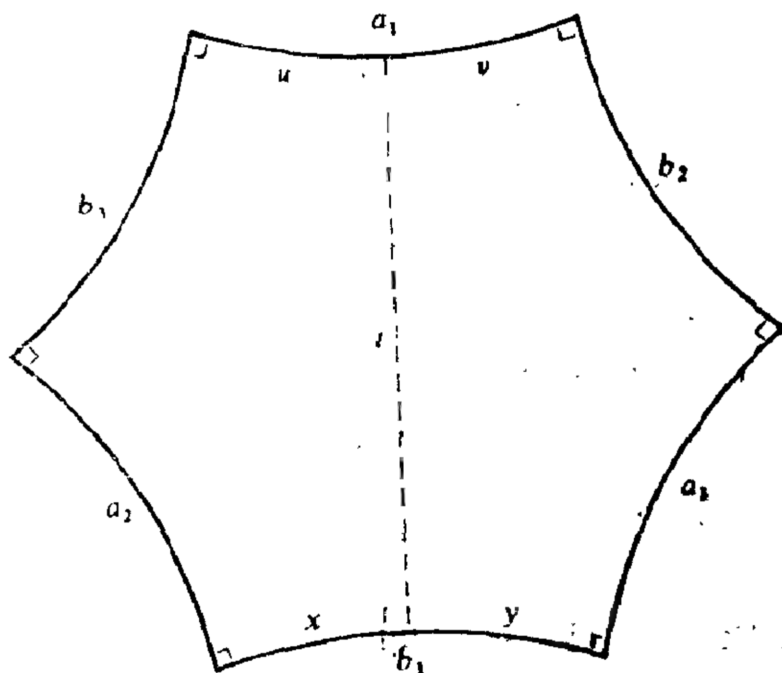


图 7.19.1

定理7.19.1

$$\frac{\sinh a_1}{\sinh b_1}=\frac{\sinh a_2}{\sinh b_2}=\frac{\sinh a_3}{\sinh b_3}$$

［证］　由定理7.18.1得

$$\sinh b_2 \sinh a_3=\cosh t=\sinh a_2 \sinh b_3$$

从而定理的结论由六边形的对称性推出。　□

定理7.19.2

$$\cosh b_1 \sinh a_2 \sinh a_3 = \cosh a_1 + \cosh a_2 \cosh a_3$$

［证］　由定理7.18.1可得如下恒等式

$$\sinh x \sinh a_2 = \cosh u$$

$$\sinh y \sinh a_3 = \cosh v$$

$$\sinh u \sinh t = \cosh a_2$$

$$\sinh v \sinh t = \cosh a_3$$

紧接着，又可得恒等式

$$(\cosh^2 a_2 + \sinh^2 u)(\cosh^2 a_3 + \sinh^2 v)$$
$$= (\cosh a_2 \cosh a_3 + \sinh u \sinh v)^2$$

事实上，利用上面那些恒等式把此式的两端表示成u, v, t的函数即知两端恒等。于是有

$$\cosh b_1 \sinh a_2 \sinh a_3$$
$$= (\cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y)\sinh a_2 \sinh a_3$$
$$= \cosh x \cosh y \sinh a_2 \sinh a_3 + \cosh u \cosh v$$
$$= (\cosh x \sinh a_2)(\cosh y \sinh a_3) + \cosh u \cosh v$$
$$= (\sinh^2 a_2 + \cosh^2 u)^{\frac{1}{2}} (\sinh^2 a_3 + \cosh^2 v)^{\frac{1}{2}} + \cosh u \cosh v$$
$$= (\cosh^2 a_2 + \sinh^2 u)^{\frac{1}{2}} (\cosh^2 a_3 + \sinh^2 v)^{\frac{1}{2}} + \cosh u \cosh v$$
$$= \cosh a_2 \cosh a_3 + \sinh u \sinh v + \cosh u \cosh v \quad \square$$

注。定理7.19.2表明六边形所有边的长度由a_1, a_2, a_3的长度确定。

§ 7.20 点到直线的距离

对于每一点z和每条测地线L，定义

$$\rho(z,L)=\inf\{\rho(z,w):w\in L\}$$

存在唯一的一条测地线L_1过z点并且与L正交，而$\rho(z,L)$正是沿着L_1度量的从z到L的距离。

我们在H^2中讨论，且不妨设L是正虚轴。则有

$$L_1=\{\zeta\in H^2:|\zeta|=|z|\}$$

并知

$$\rho(z,L)=\rho(z,\mathrm{i}|z|) \tag{7.20.1}$$

因L上的每一点都具有$\mathrm{i}t$的形式，由定理7.2.1有

$$\cosh\rho(z,\mathrm{i}t)=\frac{x^2+y^2+t^2}{2yt} \qquad (z=x+\mathrm{i}y)$$

$$=\frac{|z|}{2y}\left(\frac{|z|}{t}+\frac{t}{|z|}\right)$$

$$\geqslant\frac{|z|}{y} \tag{7.20.2}$$

此处当且仅当$t=|z|$时等号成立，这就验证了（7.20.1）式。

对如图7.20.1所示的θ，应用（7.20.2）式即得到

$$\cosh\rho(z,L)=\frac{1}{\cos\theta};\ \sinh\rho(z,L)=\tan\theta$$

$$\tanh\rho(z,L)=\sin\theta \tag{7.20.3}$$

作为这些公式的一个应用，我们提一下区域

$$\{z\in H^2:\rho(z,L)<k\}\quad(k>0)$$

这正是7.5节所描述的超圆域。

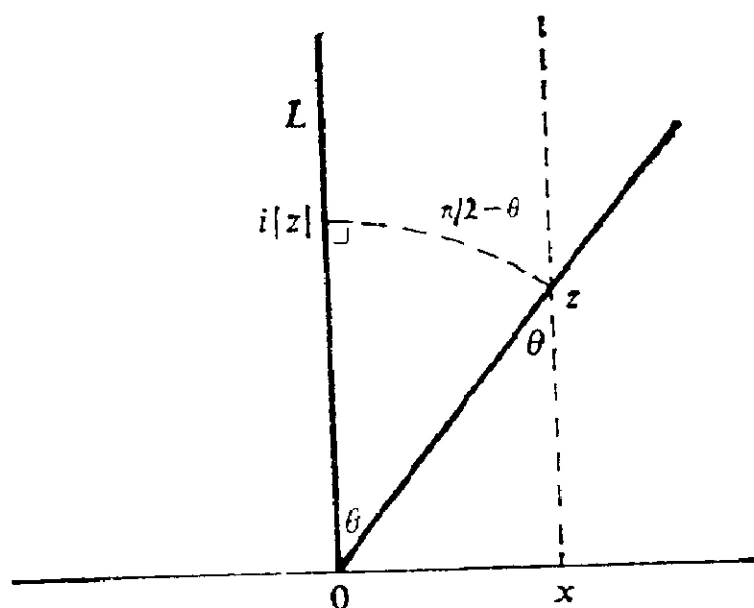


图 7.20.1

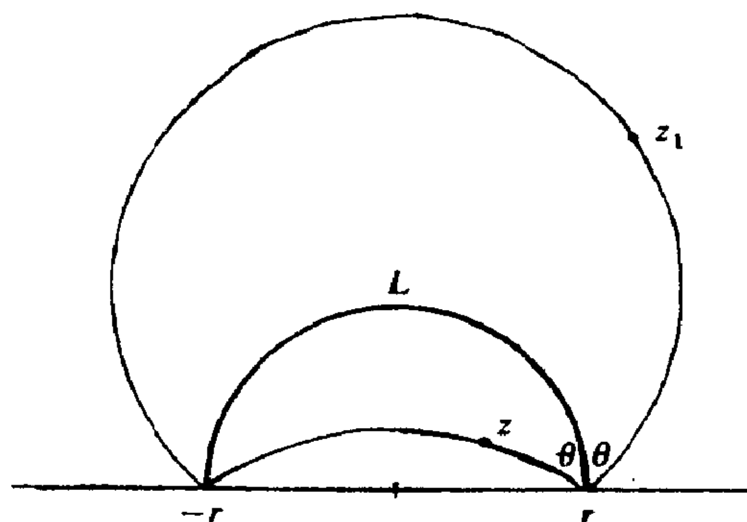


图 7.20.2

当L是H^2中的欧氏半圆周 $\{w: |w|=r\}$ 时，也可得出 $\rho(z,L)$ 的公式（参看图7.20.2）。

先设 $|z|<r$。θ 如图7.20.2所示，过 $z, r, -r$ 的欧氏圆周的圆心为 $-ir(\tan\theta)$，半径为 $r/\cos\theta$。于是有

$$|z+ir(\tan\theta)|^2=\frac{r^2}{\cos^2\theta}$$

从而

$$\tan\theta=\frac{r^2-|z|^2}{2yr} \qquad (z=x+iy)$$

当 $|z_1|>r$ 时，对 z_1 有类似的公式，只是其中的 $r^2-|z|^2$ 被代之以 $|z_1|^2-r^2$。因此，当 L 是由 $|w|=r$ 给出的测地线时，从 (7.20.3) 式得到

$$\sinh\rho(z,L)=\frac{|z|^2-r^2}{2yr} \qquad (7.20.4)$$

我们也需要导出对于模型 Δ 当 L 是 Δ 的实直径 $(-1,1)$ 时的公式。在这种情形下，我们要证明对 Δ 内所有的 w 都有

$$\sinh\rho(w,L)=\frac{2|\mathrm{Im}\,w|}{1-|w|^2} \qquad (7.20.5)$$

首先，存在唯一的一条测地线 L' 过 w 点且与 L 正交。设 L 和 L' 交于 ζ 点；于是存在 Δ 的一个等距映射 g 以 -1 和 1 为不动点，把 ζ 映成 0 并使 L 保持不变。这一映射 g 把 L' 映射成线段 $(-i,i)$，从而 $g(w)=it$，t 是某个实数。只要注意到 g 使微分 $\frac{|dz|}{y}$ 和 $\frac{2|dz|}{1-|z|^2}$ 都保持不变，就容易求出 w 和 t 之间的系关。我们得到

$$\frac{t}{1-t^2}=\frac{\mathrm{Im}\,w}{1-|w|^2}$$

另外还有

$$\begin{aligned}\rho(w,L) &= \rho(w,\zeta)\\ &= \rho(\mathrm{i}t,0)\\ &= \log\frac{1+|t|}{1-|t|}.\end{aligned}$$

这就推出（7.20.5）式。

习题 7.20

1. 设L是Δ中的测地线$(-e^{i\theta}, e^{i\theta})$，试求出$\sinh\rho(z,L)$的显式表达式，$z\in\Delta$。

§ 7.21 线段的垂直平分线

设z_1和z_2是两个不同的点，w是$[z_1,z_2]$的中点。我们要证明

$$\{z:\rho(z,z_1)=\rho(z,z_2)\}$$

是过w点且垂直于$[z_1,z_2]$的唯一的测地线，这就是$[z_1,z_2]$的**垂直平分线**。

我们在H^2中讨论，并设$z_1=\mathrm{i}$，$z_2=r^2\mathrm{i}$，$r>1$；于是$w=r\mathrm{i}$。由定理7.2.1知等式

$$\cosh\rho(z,z_1)=\cosh\rho(z,z_2)$$

成立的充要条件是

$$\frac{|z-z_1|^2}{y}=\frac{|z-z_2|^2}{r^2y}$$

化简得到$|z|=r$。

在模型Δ中，保向等距映射的形式为

$$g(z)=\frac{az+\bar{c}}{cz+\bar{a}},\qquad |a|^2-|c|^2=1$$

应用（7.2.4）式，即知点z位于〔$0,g(0)$〕的垂直平分线上的充要条件是

$$\frac{|z|^2}{(1-|z|^2)(1-|0|^2)}=\frac{|z-g(0)|^2}{(1-|z|^2)(1-|g(0)|^2)}$$

这等价于

$$|\bar{a}z-\bar{c}|^2=|z|^2$$

因

$$|\bar{a}z-\bar{c}|^2-|cz-a|^2=|z|^2-1$$

故可看出〔$0,g(0)$〕的垂直平分线就是g^{-1}的等距圆周。

习题 7.21

1. 证明H^2中两点$z_j=x_j+iy_j$（$j=1,2$）的垂直平分线为

$$L=\{z: y_1|z-z_2|^2=y^2|z-z_1|^2\}$$

并证明对于任何一点z_1和H^2中的任何一个紧子集K，只要$|z_2|$充分大，就有$L\cap K=\phi$。

§7.22 不相交测地线的公垂线

若L_1和L_2是互不相交的两条测地线，则存在唯一的一条测地线与L_1和L_2都正交。

为证明这一结论，我们首先注意到此命题在等距映射下不变，故可设L_1和L_2是H^2中分别由方程

$$x=0,\qquad (x-a)^2+y^2=r^2$$

给出的测地线，其中$a>r>0$。同L_1正交的测地线是仅限于方程为$|z|=t$的那些测地线，而这种测地线与L_2正交的充要条件是$a^2=r^2+t^2$；因$a>r$，故存在唯一的一个正数t满足此方程。

习题 7.22

1. 试证明：具有公垂线的两条不同的测地线互不相交。

§ 7.23 不相交测地线之间的距离

对于不相交的测地线L_1和L_2，定义

$$\rho(L_1,L_2)=\inf\{\rho(z,w):z\in L_1,w\in L_2\}$$

L_1和L_2间的距离$\rho(L_1,L_2)$是沿着它们的公垂线度量的距离。

我们在H^2中讨论之，并设公垂线是正虚轴。于是L_1和L_2的方程可设为$|z|=r$和$|z|=R$，上述结论可从（7.20.4）式推出（也可参看5.4节）。

$\rho(L_1,L_2)$还有其它更方便的表达式，如引理7.17.2。此外，$\rho(L_1,L_2)$可表示成一个交比：若L_1的端点为z_1和z_2，L_2的端点为w_1和w_2，它们在无穷远圆周上的顺序为z_1，w_1，w_2，z_2，则有

$$[z_1,w_1,w_2,z_2]\cdot\tanh^2[\frac{1}{2}\rho(L_1,L_2)]=1\quad(7.23.1)$$

习题 7.23

1. 试通过在H^2内讨论并取$z_1=0, w_1=1, z_2=\infty$来验证(7.23.1)式。

§ 7.24 两相交测地线间的交角

两相交测地线的交角θ（$0<\theta<\pi$）既可以用反积表示（引理7.17.2）也可以用交比表示。若$L_1=(z_1, z_2)$，$L_2=(w_1, w_2)$且其端点在无穷远圆周上的顺序为z_1, w_1, z_2, w_2，则

$$[z_1, w_1, z_2, w_2]\ \sin^2\frac{\theta}{2}=1$$

要想证明这一结论可应用模型Δ及$L_1=(-1,1)$，$L_2=(e^{i\theta}, -e^{i\theta})$。

§ 7.25 两测地线间的等分线

设L_1和L_2是两条不同的测地线，称

$$L=\{z: \rho(z, L_1)=\rho(z, L_2)\}$$

为L_1和L_2的**等分线**。可证明L是一条或两条测地线。

情况1 L_1和L_2**平行**。

此时L_1和L_2可取为H^2中的$x=a$和$x=-a$。由（7.20.3）式知z属于L的充要条件是

$$|x-a|=|x+a|$$

这等价于$x=0$。

情况2　L_1和L_2不相交。

取L_1和L_2为H^2中的$|z|=1$和$|z|=r^2$。由（7.20.4）式知z属于L的充要条件是

$$(|z|^2-r^4)^2=r^4(|z|^2-1)^2$$

这推出$|z|=r$。

情况3　L_1和L_2相交。

取L_1和L_2为Δ中的测地线$(e^{-i\theta},-e^{-i\theta})$和$L_2=(e^{i\theta},\ e^{i\theta})$（其中$0<\theta<\pi/2$）。若$L'=(-1,1)$，则$z$属于$L$的充要条件为

$$\begin{aligned}\rho(e^{i\theta}z,L')&=\rho(z,L_1)\\&=\rho(z,L_2)\\&=\rho(e^{-i\theta}z,L')\end{aligned}$$

对$z=re^{it}$应用（7.20.5）式，上式化为

$$[\sin(\theta+t)]^2=[\sin(\theta-t)]^2$$

而这推出L是两条测地线（-1,1）和（-i,i）的并。

§7.26　横　截　线

设L_1和L_2是两条不相交的测地线。当且仅当L与L_1和L_2都交成θ角时称测地线L为L_1和L_2的θ-横截线（$0<\theta<\pi/2$）。为举例说明θ-横截线是怎样自然产生的，我们考虑H^2的等距映射$g(z)=kz$（$k>0$）以及测地线L：$x=0$。若L_1是与L相交的任一测地线，则L就是L_1和$g(L_1)$的一条θ-横截线。我们需要搞清楚的是θ-横截线之间所存在的度量关系。

L_1和L_2的公垂线h是L_1和L_2唯一的一条$\pi/2$-横截线。

我们将会看到，对于所有其他的θ值，恰好存在四条θ-横截线。设L_0是L_1和L_2的公垂线，L^*是L_1和L_2的等分线。我们在模型Δ中讨论，并设

$$L_0=(-1,1),\quad L^*=(-i,i)$$

这种情况如图7.26.1所示，其中指出了四条横截线，每种情形两条。不难证明，对于$(0,\pi/2)$中的每个θ值，可以用这样的方法得到四条θ-横截线而无其他的θ-横截线；证明从略。

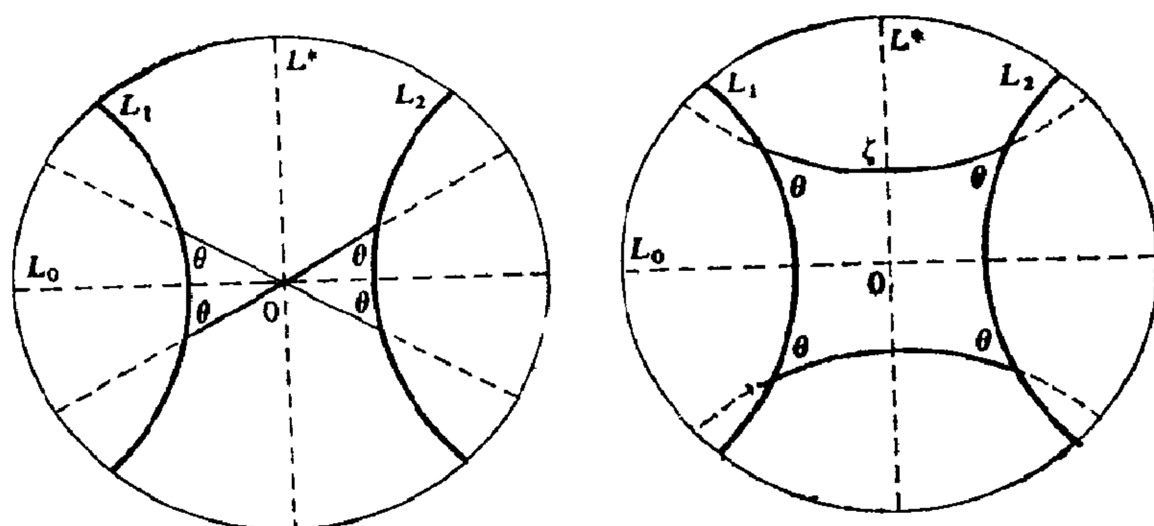


图 7.26.1

参照欧氏几何，我们可称情形（i）中的两条θ-横截线为**交错横截线**，情形(ii)中的两条θ-横截线为**互补横截线**。以t_0表示一条θ-横截线在L_1和L_2之间的线段的长度。对于交错横截线，从定理7.11.2推出

$$\sinh\frac{1}{2}\rho(L_1,L_2)=\sinh\frac{t_0}{2}\sin\theta$$

对于互补横截线，从定理7.17.2推出

$$\cosh\frac{1}{2}\rho(L_1,L_2)=\cosh\frac{t_0}{2}\sin\theta$$

习题 7.26

1. 对于给定的一个θ值，交错θ-横截线段比互补θ-横截线段长还是短？

2. 设两条交错θ-横截线与L_1交于z_1和z_2，两条互补θ-横截线与L_1交于w_1和w_2。$\rho(z_1,z_2)$ 和$\rho(w_1,w_2)$中哪一个大？

§ 7.27　线束的一般理论

对*Fuchs*群作详细讨论所要用到的双曲几何学的许多内容，最好用测地线束来描述。例如，我们可以把圆，极限圆和超圆视为同一概念的简单变形，这就扩大了所讨论对象的范围。我们将看到，线束的分类很自然地就会引出等距映射的分类，这种分类要比4.3节中所作的分类更加清晰。这一节我们只阐述线束的概念并列出其主要性质，下三节再作详细讨论。

每对测地线L和L'应当位于称之为由L和L'所确定的线束$\mathscr{P}$中，这种线束是以几何方式定义的测地线一参族。与每个线束$\mathscr{P}$相对应存在一个正交曲线族$\mathscr{C}$，称为$\mathscr{P}$的补族；$\mathscr{C}$中的曲线一般不是测地线。更重要的是$\mathscr{P}$和$\mathscr{C}$要满足如下性质。

*P*1：双曲平面中的每一点恰好位于$\mathscr{C}$的一条曲线上。

*P*2：双曲平面中的每一点恰好位于$\mathscr{P}$的一条曲线上，最多只有一个点例外。

*P*3：$\mathscr{P}$中每条测地线与$\mathscr{C}$中每条曲线正交。

$P4$：在关于$\mathscr{P}$内任何一条测地线的反射变换下，$\mathscr{C}$中的每条曲线都保持不变。

$P5$：$\mathscr{C}$中任何两条曲线C_1和C_2是等距的；即对C_1上每一点z_1，必存在C_2上某点z_2使得

$$\rho(z_1, z_2) = \rho(C_1, C_2)$$

而且z_1和z_2必位于$\mathscr{P}$内的同一条测地线上。

$P6$：两个点z和w位于$\mathscr{C}$内同一条曲线上的充要条件是$[z, w]$的垂直平分线属于$\mathscr{P}$。

$P7$：集合$\mathscr{P}$是具有如下形式

$$\{z: a\sinh\rho(z, L) = b\sinh\rho(z, L')\}$$

的测地线的集合，a和b是正常数。

由L和L'所确定的线束$\mathscr{P}$分为以下三种情况，即

(i)　当L和L'平行时，称$\mathscr{P}$为抛物线束；

(ii)　当L和L'相交时，称$\mathscr{P}$为椭圆线束；

(iii)　当L和L'不相交时，称$\mathscr{P}$为双曲线束。

下面三节将分别对这三种线束作详细的讨论。

§ 7.28　抛物型线束

设L和L'是具有公共端点w的两条平行测地线。定义$\mathscr{P}$为所有以w为端点的测地线的集合，$\mathscr{C}$为所有与无穷远圆周切于w点的极限圆的集合（参看7.5节）。利用模型H^2并取$w = \infty$；此时，$\mathscr{P}$中的测地线就是直线$x = \text{const}$，而$\mathscr{C}$中的曲线为$y = \text{const}$，$P1, P2, P3, P4$显然满足。

考察两个极限圆$y = k$和$y = K$。从定理7.2.1得到

$$\cosh\rho(x+ik, s+ik) = \frac{(x-s)^2+k^2+K^2}{2kK}$$

$$\geqslant \cosh\rho(x+ik, x+iK)$$

这就推出$P5$。

$[z_1, z_2]$ 的垂直平分线为

$$\frac{|z-z_1|^2}{y_1} = \frac{|z-z_2|^2}{y_2}$$

$(z_j = x_j + iy_j)$，这条测地线以∞为端点的充要条件是$y_1 = y_2$；这就证明了$P6$。

习题 7.28

1. 通过证明当L和L'分别为$x=a$和$x=a'$时有

$$\frac{\sinh\rho(u+iv, L)}{\sinh\rho(u+iv, L')} = \frac{|u-a|}{|u-a'|}$$

来验证$P7$。

§ 7.29 椭圆型线束

设L和L'是两条相交于双曲平面中一点w的测地线。定义$\mathscr{P}$为所有过w点的测地线的集合. $\mathscr{C}$是所有圆周

$$C_r = \{ z: \rho(z,w) = r \}$$

的集合。应用模型Δ且设$w=0$,则$\mathscr{P}$中的测地线就是Δ的欧氏直径,$\mathscr{C}$中的曲线是以原点为圆心的欧氏圆周。显然,$P1$,$P2$,$P3$和$P4$都成立，$P2$中的例外点是w。

为证明$P5$也成立，我们设z属于C_r，z'属于C_t。应用(7.2.4)式,知$\rho(z,z')$的最小值恰好在$|z-z'|$达到其最小值时达到，而这只有在z和z'位于$\mathscr{P}$中同一条测地线上时才

可能发生，这就证明了$P5$，$P6$的证明是平凡的，因为

$$\rho(z,w)=\rho(z',w)$$

既表示z和z'位于同一条C_r上，又表示w位于〔z,z'〕的垂直平分线上。

习题 7.29

1. 试验证$P7$（可参看7.25节情况3）。

§ 7.30 双曲型线束

设L和L'是两条不相交的测地线，L_0为其公垂线。定义$\mathscr{P}$是与L_0正交的所有测地线的集合，$\mathscr{C}$是与L_0具有相同端点的所有超圆（如7.5节所定义）的集合。作为这种情况的标准模型我们采用半平面H^2并取L_0为正虚轴。则$\mathscr{P}$由所有测地线$|z|=\text{const}$组成，$\mathscr{C}$由所有曲线$\arg z=\text{const}$组成。这直接推出$P1,P2,P3,P4$都成立。

为验证$P5$，我们考虑$\mathscr{C}$中两条曲线

$$C_1=\{z:\arg z=\theta\},C_2=\{z:\arg z=\phi\}$$

从定理7.2.1得到

$$\sinh^2\left[\frac{1}{2}\rho(te^{i\theta},re^{i\phi})\right]=\frac{|te^{i\theta}-re^{i\phi}|^2}{4tr\sin\theta\sin\phi}$$

$$=\frac{1}{4\sin\theta\sin\phi}\left(\frac{t}{r}+\frac{r}{t}-2\cos(\theta-\phi)\right)$$

而这只是在$t=r$时才取最小值。这就证明了$P5$。

现在考虑两点$w_j=u_j+iv_j$，$j=1,2$；〔w_1,w_2〕的垂直平分线的方程为

$$\frac{|z-w_1|^2}{v_1}=\frac{|z-w_2|^2}{v_2}$$

其等价形式为

$$(v_2-v_1)|z|^2-2x(u_1v_2-u_2v_1)=\text{const}$$

这种测地线属于$\mathscr{P}$的充要条件是$u_1v_2=u_2v_1$，即w_1和w_2位于$\mathscr{C}$中同一条曲线上；这就证明了$P6$。

习题 7.30

1. 验证$P7$.

2. 设P是任何线束（不必双曲）。试证明$\mathscr{C}$中的任一曲线上不存在三个共线的点。

3. 试证明双曲三角形三条边的垂直平分线属于同一线束。

§ 7.31 等距映射的分类

如果我们回忆定义4.3.2所给出的$M\ddot{o}bius$变换的分类并考虑到定理5.2.1，我们就会看到，双曲平面的每个等距映射或为抛物变换，或为椭圆变换，或为双曲变换。这些变换可由它们的不动点位置或函数tr^2来识别。事实上，每个这样的等距映射都可以表示成两个对合变换的乘积，而等距映射的几何作用与线束理论紧密相关。下面三节我们来探讨这一思想。

§ 7.32 抛物型等距映射

等距映射g称为是抛物的，当且仅当可以表示成$g=\sigma_2$

σ_1，其中σ_j是关于测地线L_j的反射，而L_1和L_2确定一个抛物线束（因而是两条平行的测地线）。当$g(z)=z+1$作用在H^2上时，显然有此结论；由不变性知，结论在一般情况下也正确。

给定一个抛物等距映射g，其相应的抛物线束是由所有端点在g的不动点处的测地线组成的线束，而更重要的是L_1（或L_2）可以在这个线束内任意选取。L_2还是L_1和$g(L_1)$的等分线。

习题 7.32

1．设g是以w为不动点的抛物变换，L是以w为端点的测地线。对任何一点z，设z'是L上使得$[z, z']$与L正交的点。求证

$$\rho(z,gz)\geqslant\rho(z',gz')$$

2．设g是作用在H^2上的一个抛物等距映射。试证明存在一个H^2上的共形等距映射h，使得hgh^{-1}是$z\mapsto z+t$，t是某个非零实数。设T_g是以这样的方法得到的t的集合（g固定而h变动）。求证T_g或为$(-\infty,0)$或为$(0,+\infty)$（我们分别称g为负的和正的）。求出关于

$$g(z)=\frac{az+b}{cz+d}\qquad (ad-bc=1)$$

为正的充要条件（用a，b，c，d表达）。

§ 7.33 椭圆型等距映射

等距映射g称为是**椭圆的**，当且仅当g可以表示为$g=\sigma_2\sigma_1$，其中σ_j是关于L_j的反射，而L_1和L_2属于一个椭圆线束。因当$g(z)=e^{i\theta}z$时，结论成立，故由不变性知结论对一般情况也成立。

给定一个椭圆等距映射g，其相应的椭圆线束是由双曲平面内所有过g的不动点v的测地线组成的线束。而且L_1（或L_2）可在线束内任意选取，另一条L_j则由g唯一确定。

一个椭圆等距映射g完全确定了它在双曲平面中的不动点v及实数$\theta\in[0,2\pi)$，又完全被它的不动点v和实数θ所确定。事实上，g也以v关于无穷远圆周的对称点v_1为不动点，故有

$$\frac{g(z)-v}{g(z)-v_1}=e^{i\theta}\left(\frac{z-v}{z-v_1}\right)$$

这表明$g^{(1)}(v)=e^{i\theta}$。我们称θ为g的**旋转角**。因g在$\mathscr{M}$内共轭于变换$z\mapsto e^{i\theta}z$，故有

$$\mathrm{tr}^2(g)=4\cos^2\frac{\theta}{2}$$

习题 7.33

1. 设椭圆元素g和h的旋转角为θ和ϕ，θ，$\phi\in(0,2\pi)$。试证明g和h关于双曲等距共形映射群共轭的充要条件为$\theta=\phi$。

§ 7.34 双曲型等距映射

等距映射g称为是**双曲的**，当且仅当g可以表示为$g=\sigma_2\sigma_1$，其中σ_j是关于L_j的反射，而L_1和L_2确定一个双曲线束。g在双曲平面中的轴是线束的轴，即与线束中所有直线都正交的那条唯一的测地线，它的端点就是g的两个不动点。当然，g的轴是唯一的g-不变测地线。L_1（或L_2）可任意选取，另一条L_j则由g确定。当$g=kz$（$k>0$）时，这些事实容易验证，

而由不变性知对于一般情况结论仍成立。

显然，若$g(z)=kz$，则由定理7.2.1有

$$\sinh\frac{1}{2}\rho(z,gz)=\frac{|z|\,|1-k|}{2y\sqrt{k}}$$

当z取遍H^2中的点时，其最小值只在g的轴上每一点达到（g的轴为$x=0$）。因$\inf_z\rho(z,gz)$在共轭变换下保持不变，故对一般的双曲元素g，可定义g的**平移长度**T为

$$T=\inf_z\rho(z,gz)$$

显然T是正数，且（仍由不变性推出）

$$\cosh^2(\frac{1}{2}T)=1+\frac{(1-k)^2}{4k}$$

$$=\frac{1}{4}\mathrm{tr}^2 g$$

故有

$$\frac{1}{2}|\mathrm{tr}g|=\cosh(\frac{1}{2}T)$$

双曲元素g作为两个对合变换的复合还有另外的表示方式：等距变换g双曲，当且仅当g可以表示为$g=\varepsilon_2\varepsilon_1$，其中$\varepsilon_j$是关于某点$v_j$的二阶旋转，而$v_j$位于$g$的轴上。此处$v_1$（或$v_2$）可任意选取，另一个$v_j$则由$g$所确定。这只需对$g(z)=kz$的特殊情形证明之即可，而此时的结论可直接推出。显然，

$$T=2\rho(v_1,v_2)$$

并且$\varepsilon_2(v_1)=g(v_1)$。故从$v_1$出发经过$v_2$点的半直线的终点是$g$的吸收型不动点。

§ 7.35 位移函数

设g是双曲平面的一个等距映射。容易看出，位移函数

$$z \mapsto \rho(z, gz) = \rho(z, g^{-1}z)$$

确定了一对函数 $\{g, g^{-1}\}$，也被一对函数 $\{g, g^{-1}\}$ 所确定。这是讨论等距映射的一种特别引人注目的方法；不过，为了便于讨论，最好采用函数

$$z \mapsto \sinh \frac{1}{2} \rho(z, gz)$$

我们将指出这一函数的纯几何含义。

定理7.35.1 (i) 若g是以A为轴且平移长度为T的双曲元素，则

$$\sinh \frac{1}{2} \rho(z, gz) = \cosh \rho(z, A) \sinh (\frac{1}{2} T)$$

(ii) 若g是以v为不动点且旋转角为θ的椭圆元素，则

$$\sinh \frac{1}{2} \rho(z, gz) = \sinh \rho(z, v) \left|\sin \frac{\theta}{2}\right|$$

此处我们取θ为属于区间 $[-\pi, \pi]$ 的那个值。

(iii) 若g是以v为不动点的抛物元素，则

$$P(z, v) \sinh \frac{1}{2} \rho(z, gz)$$

是只与g有关的常数，其中 $P(z, v)$ 是双曲平面的 *Poisson* 核。

注：*Poisson*核曾在1.6节中讨论过。

［证］　利用共轭变换，不妨设(i)中的g作用在H^2上，且为$g(z)=kz$，$k>1$。由定理7.2.1有

$$\sinh\frac{1}{2}\rho(z,gz)=\frac{|z-kz|}{2y\sqrt{k}}$$

$$=\left(\frac{|z|}{y}\right)\frac{1}{2}\left(\sqrt{k}-\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$$

$$=\left(\frac{|z|}{y}\right)\sinh\left(\frac{1}{2}T\right)$$

其中用到了当$|z|=y$（即$x=0$）时$\rho(z,gz)=T$的结论（参看7.34节）。最后，因A是正虚轴，我们可应用7.20节并得到

$$\cosh\rho(z,A)=\frac{|z|}{y}$$

为证明（ii），不妨设g作用在Δ上且为$g(z)=e^{i\theta}z$。因

$$\rho(z,e^{i\theta}z)=\rho(z,e^{2\pi i-i\theta}z)$$

及

$$\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|=\left|\sin\left(\pi-\frac{\theta}{2}\right)\right|$$

我们可设$0<\theta<\pi$（$\theta=0$和$\theta=\pi$的情况是平凡的）。

构造以$0,z,gz$为顶点的三角形，设相应的角为θ,ϕ,ϕ。平分在原点的角得到一个直角三角形，它的三个角为$\theta/2$，$\phi,\pi/2$，它们的对边长度为$\rho(z,gz)/2$，s，$\rho(z,0)$。从7.11节得到

$$\sinh\frac{1}{2}\rho(z,gz)=\sinh\rho(z,0)\sin\frac{\theta}{2}$$

要证明（iii），只需考虑$g(z)=z+1$作用在H^2上的情况；一般情况时的结论可通过通常的不变性论证及第一章中所作的关于*Poisson*核的讨论推出。此处*Poisson*核的特点在于它的阶层曲线与位移函数的阶层曲线的重合；事实上，这就是（iii）的全部结论。

若$g(z)=z+1$，则$v=\infty$且

$$P(z,v)\sinh\frac{1}{2}\rho(z,gz)=y\left(\frac{1}{2y}\right)=\frac{1}{2}\qquad\square$$

最后，顺便指出，在所有情况下，位移函数的阶层曲线就是族$\mathscr{C}$中的曲线，$\mathscr{C}$正交于关于g的线束$\mathscr{P}$。

习题 7.35

1．对任何一个等距映射g，设m是$\rho(z,\ gz)$的下确界。试证明g是双曲元素的充要条件是$m>0$。若$m=0$，试证明当m能达到时g是椭圆元素，当m不能达到时g是抛物元素。

设w是满足$\rho(w,\ gw)>m$的任意一点。试证明$\rho(w,\ gw)$的值和集合$\{z:\ \rho(z,\ gz)=m\}$确定了一对函数$\{g,\ g^{-1}\}$。

§7.36 等距圆周

回忆4.1节，对任一*Möbius*变换g，g的等距圆周I_g是这样一个点集，g在这个集合上的作用相当于一个欧氏等距变换。

若g是双曲平面Δ上的等距映射，则

$$I_g=\{z:\rho(z,0)=\rho(z,g^{-1}(0))\}$$

（参看7.21节）。我们有必要给出另一证明。

［证］　根据7.32-7.34节，可写出表示式$g=\sigma_2\sigma_1$，此处σ_j是关于L_j的反射。选取L_2过原点，故σ_2是欧氏等距变换。我们推出z属于I_g的充要条件是σ_1在z点的欧氏偏差是统一的偏差，因而$I_g=L_1$。这使我们看出

$$\sigma_1(0)=\sigma_1\sigma_2(0)=g^{-1}(0)$$

从而I_g（$=L_1$）是0和$g^{-1}(0)$的平分线。□

这是一个几何证明，它揭示了平面双曲几何中的等距圆周的本质。给定双曲平面内或无穷远圆周上任意一点w，可假定$g(w)\neq w$，且将g表示为$g=\sigma_2\sigma_1$，此处取L_2过w点。我们称L_1为g的w-等距圆周并记为$I_g(w)$。在这种形式下，有一个有用的不变性质，即

$$I_{hgh^{-1}}(hw)=h(I_g(w))$$

当然，$w=0$时即为等距圆周。注意到g在$\partial\Delta$上作用的对称性，我们可允许w是扩充平面中的任意一点，从而有

$$I_g(w)=I_g\left(\frac{1}{\bar{w}}\right)$$

特别有

$$I_g(0)=I_g(\infty)$$

这就是经典等距圆周I_g对特殊点∞的简单的依存关系。更详细的讨论可参看9.5节。

习题　7.36

1. 试证明：按I_g与$I_{g^{-1}}$是相交，平行和不相交，g分别为椭圆元素，抛物元素和双曲元素。

§ 7.37 典 型 域

对双曲平面的每个共形等距映射g，我们将赋予一个"典型"域Σ_g，这个区域同g的几何作用密切相关，并且它唯一地确定出一对函数$\{g, g^{-1}\}$。

定义7.37.1 设g是一个共形等距映射。若g既不是恒等映射也不是二阶椭圆元素，则g的**典型域**Σ_g定义为

$$\Sigma_g = \{ z: \sinh \frac{1}{2} \rho(z, gz) < \frac{1}{2} |\mathrm{tr} g| \}$$

若g是二阶元素且以v为不动点，则$\Sigma_g = \{v\}$。

典型域的性质由下面的定理来描述。

定理7.37.2 (i) Σ_g**在共轭变换下不变**，即

$$\Sigma_{hgh^{-1}} = h(\Sigma_g)$$

(ii) Σ_g**确定了一对函数**$\{g, g^{-1}\}$，**即当且仅当**$h = g$**或**$h = g^{-1}$时$\Sigma_g = \Sigma_h$。

在证明这一定理之前，我们先叙述Σ_g的几何构造。

Σ_g的几何构造 当g不是二阶元素时，Σ_g可构造如下：对于无穷远圆周上的每一点z，设L_z是连接z和gz的测地线。若以P表示双曲平面，则有

$$\Sigma_g = P - \bigcup_z L_z$$

先设g是抛物元素：此时，只需考虑g作用在H^2上并且$g(z) = z + 1$的情况。在这种情况下，有

$$P - \bigcup_z L_z = \{ x + iy: y > \frac{1}{2} \}$$

另外还有

$$|\operatorname{tr} g| = 2$$

故由定理7.2.1可知，z属于Σ_g的充要条件是

$$1>\sinh\frac{1}{2}\rho(z,gz)=\frac{1}{2y}$$

其次设g是椭圆元素。不妨设g作用在Δ上并且$g(z)=e^{i\theta}z, 0<|\theta|<\pi$。在这种情况下，直线族$L_z$中所包含的测地线在原点所对的角为$\theta$（参看图7.37.1）。

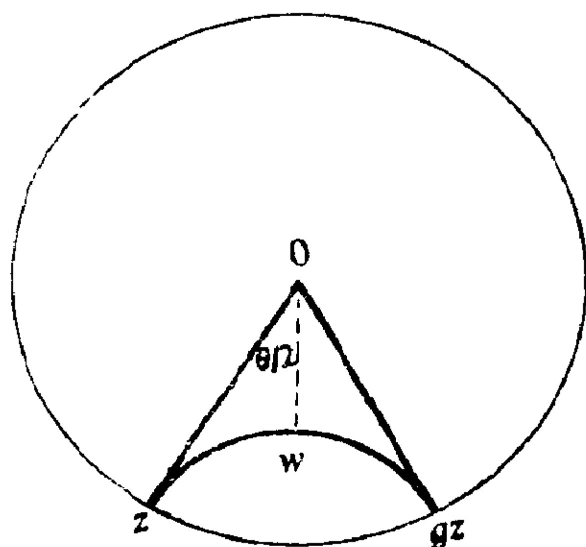


图 7.37.1

由7.9节，我们得到

$$\sinh\rho(0,w)\tan\frac{\theta}{2}=1$$

因此

$$P-\bigcup_z L_z=\{z:\sinh\rho(z,0)\tan\frac{\theta}{2}<1\}$$

从而由定理7.35.1有

$$\sinh\frac{1}{2}\rho(z,gz)=\sinh\rho(z,0)\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|$$

$$=\sinh\rho(z,0)\left|\tan\frac{\theta}{2}\right|\left(\frac{1}{2}|\mathrm{tr}g|\right)$$

这就是所述的结果。

最后设g是双曲元素，不失一般性可设$g(z)=kz$，$k>1$，且作用在H^2上。在这种情况下，$P-\bigcup_z L_z$是超圆域，即图7.37.2的阴影部份。

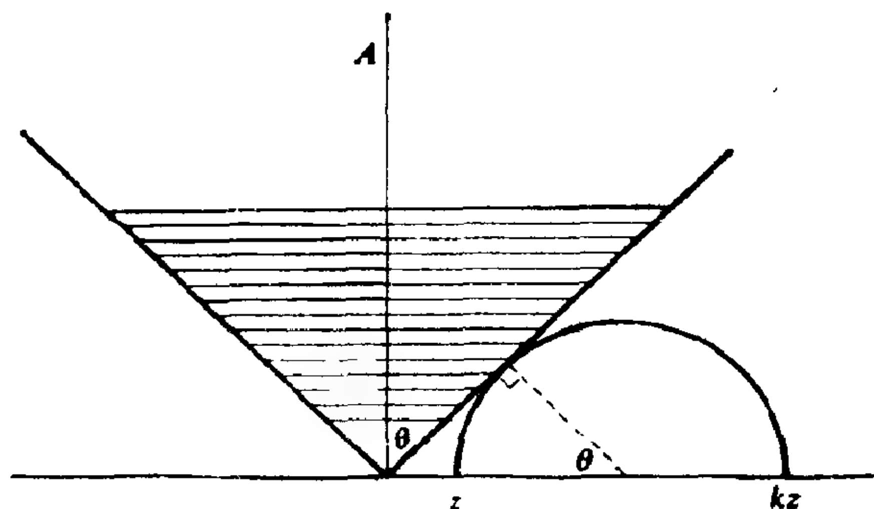


图 7.37.2

事实上，由7.20节，z属于这个区域的充要条件是

$$\cosh\rho(z,A)<\frac{1}{\cos\theta}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}(k+1)}{\frac{1}{2}(k-1)}$$

$$= \frac{e^T+1}{e^T-1}$$

$$= \frac{\cosh(\frac{1}{2}T)}{\sinh(\frac{1}{2}T)}$$

应用定理7.35.1即知Σ_g确实是这个阴影区域。

［定理7.37.2的证明］ 首先，(i) 成立是平凡的。其次，从Σ_g的几何构造容易看出，Σ_g确定了g的不动点也确定了无穷远圆周上的点对 $\{z, gz\}$ 。这就推出Σ_g确定了函数对 $\{g, g^{-1}\}$ 。 □

显然，不仅Σ_g可由g的不动点以及无穷远圆周上的一对点 $\{z,gz\}$ 构造出来，**而且Σ_g的边界也由$\mathscr{C}$中一条或两条曲线组成**，$\mathscr{C}$是g所对应的线束$\mathscr{P}$的正交曲线族。

§ 7.38 等距映射乘积的几何

我们知道，双曲平面的任何一个共形等距映射都可以表示成σ_j(关于测地线L_j的反射)的乘积$f=\sigma_2\sigma_1$。而L_1和L_2的相对几何位置确定了f的本质；例如，若L_1和L_2相交，则f是椭圆元素。L_1和L_2的相对度量位置可确定出f的几何参数(例如f的旋转角)，并且其方法相当简单。

定理7.38.1 *设L_1和L_2是两条不同的测地线，σ_j是关于L_j的反射，并设$f=\sigma_2\sigma_1$。则反积 (L_1L_2) 满足*

$$(L_1,L_2) = \frac{1}{2}|\mathrm{tr} f|$$

［证］ 若L_1和L_2不相交，则其公垂线L在σ_1和σ_2作用下不变。这就推出f是双曲元素，L是f的轴，因而f的平移长度T满足

$$\frac{1}{2}T = \rho(L_1, L_2)$$

由引理7.17 2知反积

$$(L_1, L_2) = \cosh\rho(L_1, L_2)$$

此时，由 /.34节）

$$|\mathrm{tr} f| = 2\cosh\left(\frac{1}{2}T\right)$$

就推出定理的结论成立。

若L_1和L_2平行，则反积为1，此时，由f是抛物元素而知$|\mathrm{tr} f| = 2$。

最后设L_1和L_2相交成θ角，$0<\theta\leqslant\pi/2$，则

$$(L_1, L_2) = \cos\theta$$

在这种情形下，f是关于L_1和L_2的交点的一个旋转变换，转角为2θ，并且

$$|\mathrm{tr} f| = 2\cos\theta \qquad \square$$

给定两个等距映射g和h，可表示为

$$g = \sigma_1\sigma_2, \quad h = \sigma_3\sigma_4$$

其中σ_j是关于测地线L_j的反射，而L_j选自某个线束$\mathscr{P}_1$和$\mathscr{P}_2$。假定$\mathscr{P}_1$和$\mathscr{P}_2$有一条公共的测地线L，则可取$L_2 = L = L_3$，从而$\sigma_2 = \sigma_3$且

$$gh = (\sigma_1\sigma_2)(\sigma_3\sigma_4) = \sigma_1\sigma_4$$

于是我们就得到了乘积gh的一个简单表示式，且可从这个表示式出发去研究gh的几何作用。特别有

$$|\mathrm{tr}(gh)| = 2(L_1, L_4)$$

因而L_1和L_4相对位置的几何性质使我们能够断定元素gh的性质。本节的结果是这一技巧的一些例子；有一些这方面的有用结果未列入，此处内容的取舍取决于本书后面是否要用到。

定理7.38.2 设g和h是椭圆等距映射，g是绕u旋转2θ角，h是绕v旋转2ϕ角。假定g和h是同向旋转，$\ne v$，并且θ，$\phi\in(0,\pi)$。则

$$\frac{1}{2}|\mathrm{tr}(gh)| = \cosh\rho(u,v)\sin\theta\sin\phi - \cos\theta\cos\phi$$

［证］ 不妨设g和h作用在H^2上，u和v在正虚轴L上，并且

$$g = \sigma_1\sigma_2, \quad h = \sigma_3\sigma_4$$

其中$L_2 = L = L_3$（如图7.38.1所示）。由定理7.38.1知，只需计算（L_1，L_4）。

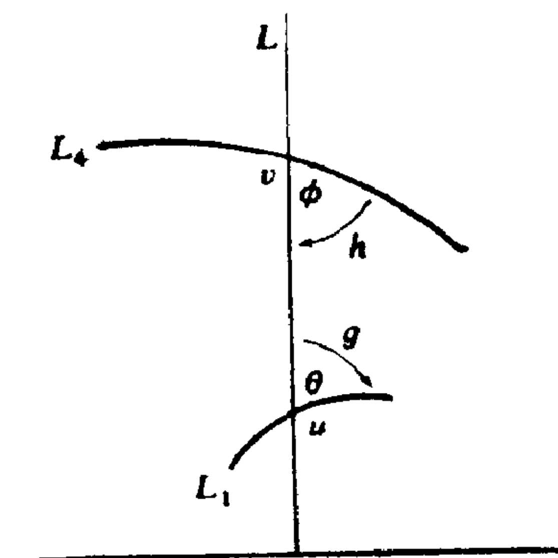


图 7.38.1

L_1的欧氏方程为

$$x^2 + y^2 - 2x|u|\cot\theta - |u|^2 = 0$$

L_4的欧氏方程为

$$x^2+y^2+2x|v|\cot\phi-|v|^2=0$$

由反积的定义有

$$(L_1,L_4)=\frac{1}{2}\left(\frac{|v|}{|u|}-\frac{|u|}{|v|}\right)\sin\theta\sin\phi-\cos\theta\cos\phi$$

这就是所求的结果，因为

$$\cosh\rho(u,v)=\cosh(\log\frac{|v|}{|u|})$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{|v|}{|u|}+\frac{|u|}{|v|}\right)$$

□

注：作为定理7.38.2的一个具体例子，知当且仅当

$$\cosh\rho(u,v)=\frac{1+\cos\theta\cos\phi}{\sin\theta\sin\phi}$$

时，gh为抛物元素。当然，gh为抛物元素的充要条件是L_1与L_4平行，而这一公式同7.10节中所给的公式一致。

其次，我们考虑当g和h是双曲元素时的乘积gh。

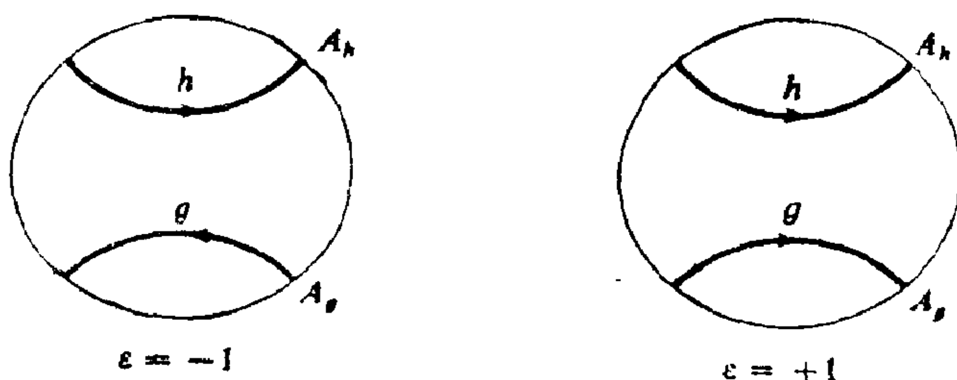


图 7.38.2

定理7.38.3　若g和h是双曲元素，其平移长度为T_g和T_h，且轴A_g和A_h不相交。则

$$\frac{1}{2}|\mathrm{tr}(gh)| = |\cosh\rho(A_g, A_h)\sinh(\frac{1}{2}T_g)\sinh(\frac{1}{2}T_h)$$

$$+\varepsilon\cosh(\frac{1}{2}T_g)\cosh(\frac{1}{2}T_h)|$$

其中ε是$+1$或-1，正负号决定于g和h的相对方向（如图7.38.2所示）。

推论7.38.4　若g和h同向（从而$\varepsilon=+1$），则gh是双曲元素。

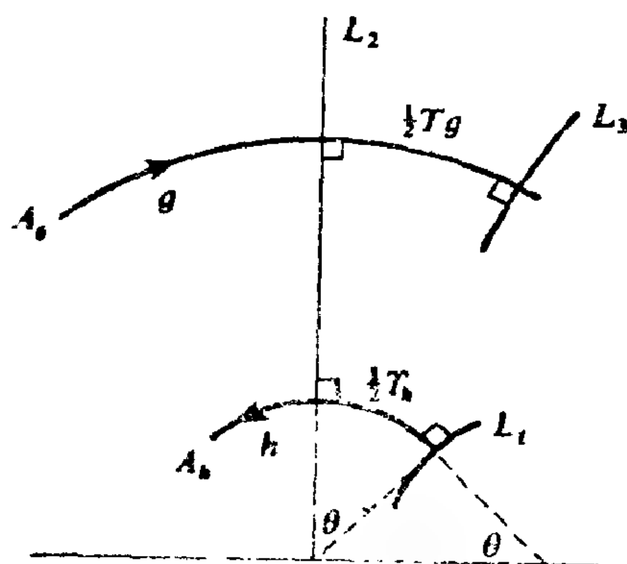


图 7.38.3

[定理7.38.3的证明]　参看图7.38.3（这是$\varepsilon=-1$的情形），其中假定正虚轴L_2是A_g和A_h的公垂线（这一假设不失一般性）。在这种情况下

$$gh = (\sigma_3\sigma_2)(\sigma_2\sigma_1) = \sigma_3\sigma_1$$

从而

$$\frac{1}{2}|\mathrm{tr}(gh)| = (L_3, L_1)$$

为了计算 (L_3, L_1)，设A_h为$|z| = t$。则L_1的方程为

$$\left|z - \frac{t}{\sin\theta}\right| = \frac{t}{\tan\theta}$$

其等价形式为

$$(x^2 + y^2)\sin\theta - 2xt + t^2\sin\theta = 0$$

因由7.9节有

$$\sin\theta = \tanh\left(\frac{1}{2}T_h\right)$$

故L_1的系数向量为

$$\left(\tanh\left(\frac{1}{2}T_h\right), t, 0, t^2\tanh\left(\frac{1}{2}T_h\right)\right)$$

对于由$|z| = s$给出的A_g，类似的结果也成立，且

$$\cosh\rho(A_g, A_h) = \frac{1}{2}\left(\frac{s}{t} + \frac{t}{s}\right)$$

直接计算反积，就可推出$\varepsilon = -1$时的结论。要想得出$\varepsilon = +1$时的结果，只需对图7.38.3作简单的修改，使得L_1和L_3出现在L_2的两侧即可。 □

推论7.38.5 设g和h是两个具有不相交的轴和相同平移长度T的双曲元素。若gh和gh^{-1}不是椭圆元素，则

$$\sinh\frac{1}{2}\rho(A_g, A_h)\sinh\left(\frac{1}{2}T\right) \geqslant 1$$

［证］ 在这些假设条件下有

$$\frac{1}{2}|\mathrm{tr}(gh)|\geqslant 1$$

且对gh^{-1}也有类似的不等式。对h或h^{-1}应用定理7.38.3，可设$\varepsilon=-1$，于是由

$$\cosh\rho(A_g,A_h)\sinh(\frac{1}{2}T_g)\sinh(\frac{1}{2}T_h)$$

$$-\cosh(\frac{1}{2}T_g)\cosh(\frac{1}{2}T_h)$$

$$=[1+2\sinh^2\frac{1}{2}\rho(A_g,A_h)]\sinh^2(\frac{1}{2}T)-[1$$

$$+\sinh^2(\frac{1}{2}T)]$$

$$=2\sinh^2\frac{1}{2}\rho(A_g,A_h)\sinh^2(\frac{1}{2}T)-1$$

即推出所求证的结果。 □

最后考虑A_g和A_h相交的情况。

定理7.38.6 若g和h是双曲元素，A_g和A_h在v_2点相交成θ角，$0<\theta<\pi$（这是从v_2出发通向g和h的吸收型不动点的两条射线间的角），则gh是双曲元素并且

$$\frac{1}{2}|\mathrm{tr}(gh)|=\cosh(\frac{1}{2}T_g)\cosh(\frac{1}{2}T_h)$$

$$+\sinh(\frac{1}{2}T_g)\sinh(\frac{1}{2}T_h)\cos\theta$$

［证］ 我们利用双曲元素的另一种表示式进行证明，

即把双曲元素表示成两个二阶旋转的乘积（7.34节）。

参看图7.38.4，我们有

$$gh=(\varepsilon_3\varepsilon_2)(\varepsilon_2\varepsilon_1)=\varepsilon_3\varepsilon_1$$

这直接推出gh是以L为轴的双曲元素，其平移长度为$2\rho(v_1, v_3)$。因而

$$\frac{1}{2}|\mathrm{tr}(gh)|=\cosh\rho(v_1,v_3)$$

故从余弦定律（7.12节）即可推出定理的结论。 □

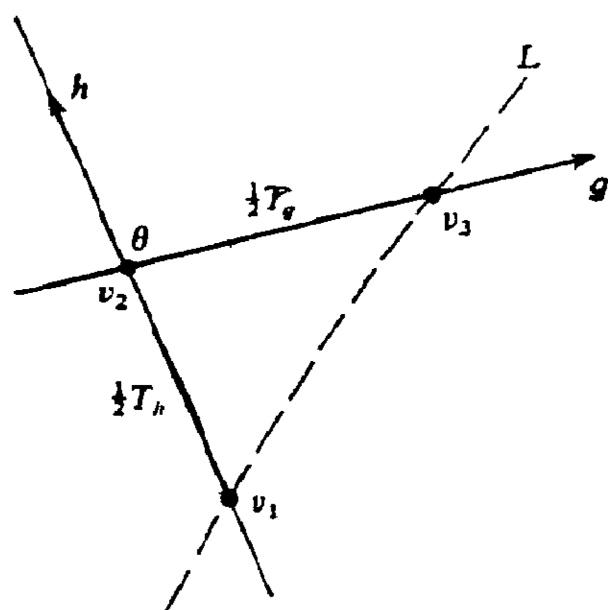


图 7.38.4

习题 7.38

1．试通过构造Δ内如下的测地线来导出推论7.38.5。把A_g和A_h的公垂线L取为实数区间（-1，1），L在A_g与A_h间的线段的中点取作原点。通过适当选取g（或g^{-1}）及h（或h^{-1}），不妨设$g=\sigma_1\sigma$，$h=\sigma\sigma_2$，其中σ是关于L的反射，σ_j是关L_j的反射（L_j位于Δ的下半部分）；且有

$$\rho(L, L_1) = \rho(L, L_2) = \frac{1}{2}T$$

再应用7.18节和7.19节的结果于各边在L，L_1，L_2，A_1和A_4上的多边形。

§ 7.39 换位子几何

回忆换位子〔g,h〕即$ghg^{-1}h^{-1}$。我们的目的是讨论〔g,h〕的几何性质，并且是通过把〔g,h〕看成g与g^{-1}的共轭元素$hg^{-1}h^{-1}$的乘积依次考虑g的各种可能性来进行讨论的。顺便指出，若g是一个转角为θ的旋转变换，则$hg^{-1}h^{-1}$也是一个转角为θ的旋转变换，不过是在相反的意义下的。因为

$$[h, g] = [g, h]^{-1} \qquad (7.39.1)$$

我们不妨只注意到g的各种可能性。我们也只需考虑g和h的共轭元素，因为

$$[fgf^{-1}, fhf^{-1}] = f[g, h]f^{-1}$$

定理7.39.1 若g是抛物元素，且g和h没有公共不动点，则〔g,h〕是双曲元素。

［证］ 用矩阵表示来证明（当$g(z)=z+1$时）是相当容易的，但几何证明却更清楚些。设g以v为不动点，L_2是从v到h（v）的测地线。当取适当的L_1和L_3时有

$$g = \sigma_1\sigma_2, \quad hg^{-1}h^{-1} = \sigma_2\sigma_3, \quad [g, h] = \sigma_1\sigma_3$$

其中L_1和L_3分别以v和$h(v)$为端点。因为g和$hg^{-1}h^{-1}$作用在相反的方向上，而L_1和L_3又显然不在L_2的同侧，故L_1和L_2不相交。于是$\sigma_1\sigma_3$是双曲元素，其平移长度为$2\rho(L_1, L_3)$。 ◻

定理7.39.2 若g是以v为不动点的椭圆元素，其旋转角为2θ（$0<\theta<\pi$），h是不以v为不动点的任一等距变换，则〔g, h〕是具有平移长度T的双曲元素，且

$$\sinh\left(\frac{1}{4}T\right)=\sinh\frac{1}{2}\rho(v,hv)\sin\theta$$

〔证〕 记$g=\sigma_1\sigma_2$，其中L_2连接v和$h(v)$。构造L_3如图7.39.1使得$hg^{-1}h^{-1}=\sigma_2\sigma_3$及〔$g,h$〕$=\sigma_1\sigma_3$。

因L_1和L_3与L_2作成等角，它们是不相交的，从而〔g,h〕是双曲元素且

$$T=2\rho(L_1,L_3)$$

从7.26节即看出

$$\sinh\frac{1}{2}\rho(L_1,L_3)=\sinh\frac{1}{2}\rho(v,hv)\sin\theta \qquad \square$$

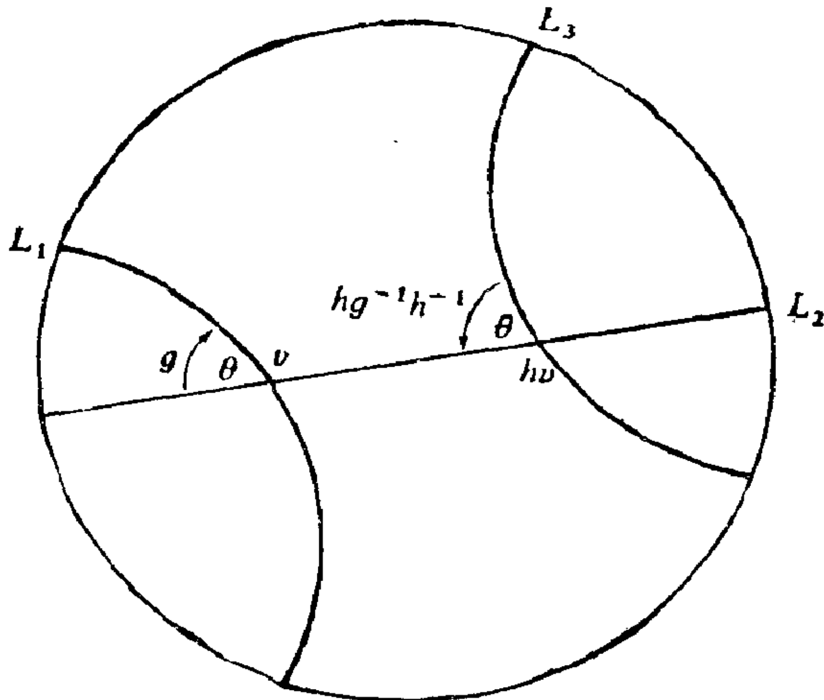


图 7.39.1

最后考虑当g是双曲元素时的〔g,h〕。若h是椭圆或抛物元素，则由（7.39.1）式知，可应用前述的结果；故不妨设g和h都是双曲元素。顺便指出，$hg^{-1}h^{-1}$的平移长度为T_g，轴为$h(A_g)$。

定理7.39.3　若g和h是双曲元素，$h(A_g)$与A_g相交成θ角（g和$hg^{-1}h^{-1}$的正向的夹角），则〔g,h〕是双曲元素，且其平移长度T满足等式

$$\cosh\left(\frac{1}{2}T\right)=1+2\sinh^2\left(\frac{1}{2}T_g\right)\cos^2\frac{\theta}{2}$$

〔证〕　应用定理7.38.6，定理中的h代之以$hg^{-1}h^{-1}$；于是有

$$\cosh\left(\frac{1}{2}T\right)=\cosh^2\left(\frac{1}{2}T_g\right)+\sinh^2\left(\frac{1}{2}T_g\right)\cos\theta \quad \square$$

我们还可以考虑许多g和h是双曲元素时的其它情况，且可描绘出当三个参数T_g，T_h和(A_g,A_h)（反积）变化时〔g,h〕的特性随之变化的生动情景。尽管作这方面的讨论是极为有用的，但是如果读者自己去做将获益更多；我们只是在图7.39.2中简单地给出三个分别对应于〔g,h〕$(=\sigma_3\sigma_1)$是椭圆元素，抛物元素和双曲元素三种情况的“框架”。

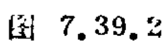


图 7.39.2

最后给出涉及相交轴的两个结果。

定理7.39.4 设g和h是双曲元素，它们的轴A_g和A_h交成θ角，$0<\theta<\pi$。若$[g,h]$不是椭圆元素，则

$$\sinh\left(\frac{1}{2}T_g\right)\sinh\left(\frac{1}{2}T_h\right)\sin\theta\geqslant 1$$

〔证〕 这就是图7.39.2中的后两个图所描述的情况。应用定理7.38.3（需将定理中的h代之以$hg^{-1}h^{-1}$，并取$\varepsilon=-1$)，有

$$1\leqslant\frac{1}{2}|\mathrm{tr}[g,h]$$

$$=|\cosh\rho(A_g,hA_g)\sinh^2\left(\frac{1}{2}T_g\right)-\cosh^2\left(\frac{1}{2}T_g\right)|$$

$$=|\sinh^2\left(\frac{1}{2}T_g\right)[1+2\sinh^2\frac{1}{2}\rho(A_g,hA_g)]$$

$$-[1+\sinh^2\left(\frac{1}{2}T_g\right)]|$$

从而

$$\sinh\left(\frac{1}{2}T_g\right)\sinh\frac{1}{2}\rho(A_g,hA_g)\geqslant 1$$

由7.26节即有

$$\sinh\frac{1}{2}\rho(A_g,hA_g)=\sinh\left(\frac{1}{2}T_h\right)\sin\theta$$

□

推论7.39.5 设$g_1,\cdots,g_n$是在一个不含椭圆元素的群G中相互共轭的双曲元素，T是它们的公共平移长度，并设诸g_j的轴A_j共点。则

$$\sinh^2\left(\frac{1}{2}T\right)\sin\frac{\pi}{n}\geqslant 1$$

〔证〕　两个轴A_i与A_j必交成θ角，此处的$\theta<\pi/n$；对此应用定理7.39.4即推出所求证的结果。 ∎

习题　7.39

1．通过将7.18节和7.19节的结果应用于各边位于A_i，A_k、L_1，L_2和L_3上的多边形从图7.39.2中的后两个图导出定理7.39.4。

2．设L是H^2中的正虚轴，且

$$h(z)=\frac{az+b}{cz+d}\qquad(ad-bc=1)$$

使H^2保持不变。试证明反积$(L,\ hL)$和交比〔0，∞，$h0$，$h\infty$〕既可以互相表示，也可以用系数a，b，c，d表示（例如证明$(L,\ hL)=2ad-1$）。并证明L和hL相交的充要条件是$ad\in(0,\ 1)$。可以看出，当L是某个g的轴而使得hL是hgh^{-1}的轴时，这些思想是十分有用的。

§7.40　注　记

关于双曲几何的一般介绍，建议读者参看〔21〕，〔32〕，〔66〕，〔68〕和〔112〕；关于双曲等距映射的一般介绍则可参看〔55〕，〔56〕，〔57〕和〔98〕。在〔102〕中有关于凸性的讨论；〔10〕讨论了凸的双曲多边形。多边形的度量关系（7.17，7.18和7.19节）可用来讨论平面几何（及黎曼曲面），如〔29〕以及关于三维流形理论的新进展的综合报告〔101〕。

第八章 Fuchs群

§8.1 Fuchs群

回忆定义6.2.2，所谓*Fuchs*群G乃是$\mathscr{M}$的一个离散子群，它具有一个不变圆盘D(因此，G是关于D的不连续群)。不妨设单位圆盘Δ(或半平面H^2)是G-不变圆盘，于是可以把G看成双曲平面等距映射的离散群。在第九章中将看到，一个这样的群在双曲平面上会产生由双曲多边形拼成的一个"棋盘"(或波纹面)。从现在起，我们只研究G的这种作用的几何学。

如果G是非初等群，则(由定理5.3.7)G的极限集Λ位于单位圆周$\partial\Delta$上(对初等的*Fuchs*群亦然)。判明Λ是不是整个圆周$\partial\Delta$是重要的。

定义8.1.1 设G是具有不变圆盘D的*Fuchs*群。若$\Lambda=\partial D$，则称G为**第一类***Fuchs*群；若Λ是∂D的真子集，则称G为**第二类***Fuchs*群。

虽已在5.1节中讨论过初等离散群，但在此仍有必要对所有的初等*Fuchs*群作出明确的描述。顺便指出，这些*Fuchs*群都属于第二类。

首先考虑仅由椭圆元素和I组成的*Fuchs*群G。由定理4.3.7知，G的元素在H^3中有一个公共不动点ζ。不妨设H^2是G-不变圆盘，于是G中的每个椭圆元素g在$\hat{C}$内有两个不动

点，记为w和$\overline{w}$（参看5.2节）。因g的轴是H^3中包含ζ点且以w和$\overline{w}$为端点的测地线，故w必与g无关。从而G的所有元素具有相同的不动点，并且容易看出G是有限循环群。

也可以用代数方法证明（只不过缺少几何解释）。不妨设Δ是G-不变圆盘，而

$$g=\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & \overline{u} \end{pmatrix}, \quad h=\begin{pmatrix} a & \overline{c} \\ c & \overline{a} \end{pmatrix}, \quad |u|=1$$

是G中的两个椭圆元素。由

$$\operatorname{tr}[g,h]=2+4|c|^2(\operatorname{Im}[u])^2$$

推出$c=0$或$\operatorname{Im}[u]=0$（否则$[g,h]$便是双曲元素）。当$|u|=1$且$u^2\neq1$时有$c=0$，因而h也以0和∞为不动点。

为了找出所有的初等Fuchs群，我们首先考虑具有一个不动点w并使Δ保持不变的任意Fuchs群G。椭圆元素的不动点不可能在$\partial\Delta$上，G的抛物元素和双曲元素的不动点必定在$\partial\Delta$上。由定理5.1.2，G的抛物元素和双曲元素不可能有公共不动点。这推出G只包含一种类型的元素，由G的离散性容易推出如下结论。

定理8.1.2 若G是任一Fuchs群，则对每个点w，稳定核

$$G_w=\{g\in G: g(w)=w\}$$

是循环群。

更一般地说，容易看出任何初等Fuchs群或为循环群，或共轭于某个群$\langle g,h\rangle$，其中$g(z)=kz$ $(k>1)$，$h(z)=-1/z$。

定义8.1.3 Fuchs群G的抛物或双曲元素g称为是本原

的。当且仅当g生成它的每个不动点的稳定核若g是椭圆元素，则当g生成其不动点的稳定核并且其旋转角具有$2\pi/n$的形式时，称其是本原的。

注8.1.4：若G_0是g的每个不动点的稳定核。则g是本原的充分必要条件是：对于G_0内所有的元素h均有$\Sigma_g \supset \Sigma_h$，其中$\Sigma_g$表示关于$g$的典型域(见7.37节）。在某些情形下（并非所有的情形），还可用迹函数描述之。

最后，我们要对$Fuchs$群中的双曲元素进行分类，将其分成简单双曲元素和非简单双曲元素两类。这种分类只是一种取决于双曲元素同它所在群的关系的分类，而不是关于双曲元素的一种"绝对"的分类。

定义8.1.5 设h是$Fuchs$群G的一个双曲元素，A是h的轴。当且仅当对于G内所有的g有$g(A)=A$或$g(A)\cap A=\phi$时，称h是G的简单元素。否则称h是非简单元素。

这种情况在6.3节中已作过描述，依照该处的术语，当且仅当轴A是G-稳定集时h是简单元素。

设G作用在Δ上，并且G没有椭圆元素。若h是简单元素，则A到Δ/G的射影$\pi(A)$与$A/\langle g\rangle$相同(其中g生成A的循环稳定核），从而$\pi(A)$是Δ/G上的一条简单闭曲线。若h是非简单元素，则存在像$f(A)$与A相交，比如说交于w点。因G没有椭圆元素，射影π在w点邻近同胚，所以$\pi(A)$是具有自交点的闭曲线。

习题 8.1

1．设G是作用在H^2上的$Fuchs$群，g：$z\mapsto kz(k>1)$属于G。试证明：g是简单元素当且仅当对G内所有的元素

$$h(z)=\frac{az+b}{cz+d}\qquad (ad-bc=1)$$

有$abcd\geqslant 0$（这等价于$|ad-1/2|\geqslant 1/2$）。

§8.2 纯双曲群

这一节研究只含双曲元素和I的群，在8.3节再研究允许包含抛物元素但不含椭圆元素的群。从黎曼曲面的观点来看，这是一类重要的群，特别是因为它们代表了亏格至少为2的紧曲面。

如果G的每个非平凡元素都是双曲元素，则称 Möbius变换群G为**纯双曲群**。由定理5.2.1知，非初等的纯双曲群具有不变圆盘，事实上，**也必定是离散的**，因而是Fuchs群。我们将用纯代数的方法来证明这个结论（并作出该证明的几何解释）；而用纯几何的方法去建立一个更强的定量结果。值得注意的是，由于它的证明，这个较强的结果（定理8.2.1）包含着许多展开后面理论所需要的信息。

定理8.2.1 **若G是以Δ为不变圆盘的纯双曲群，则G或为离散群或为初等群。进而，若$g,h\in G$且$\langle g,h\rangle$为非初等群，则对Δ内所有的z有**

$$\sinh\frac{1}{2}\rho(z,gz)\sinh\frac{1}{2}\rho(z,hz)\geqslant 1\qquad (8.2.1)$$

这个下界是最佳的。

我们提一下定理的三个推论。

推论8.2.2 若$\langle g,h\rangle$**是非初等的纯双曲群，则对所有**

的z均有

$$\max\{\rho(z,gz),\rho(z,hz)\}\geqslant 2\sinh^{-1}(1)>1.76$$

且此估计为最佳估计。

下面的例8.2.5表明这个下界是最好的。

因为G使Δ保持不变，(7.2.4)式即意味着

$$\sinh^2\frac{1}{2}\rho(0,g0)=\frac{|g(0)|^2}{1-|g(0)|^2}$$

对于$z=0$，定理8.2.1中的不等式成为

$$|g(0)|^2\cdot|h(0)|^2\geqslant(1-|g(0)|^2)(1-|h(0)|^2)$$

这等价于如下不等式（这是定理8.2.1的欧氏形式）。

推论8.2.3 若$\langle g,h\rangle$是非初等的纯双曲群，则

$$|g(0)|^2+|h(0)|^2\geqslant 1$$

我们可以通过观察而得到另一个不等式（它与$SL(2,\mathbf{C})$中的离散性概念有更加直接的联系），即若

$$g=\begin{pmatrix}a&\bar{c}\\c&\bar{a}\end{pmatrix},\quad |a|^2-|c|^2=1$$

则

$$\|g-I\|^2\geqslant 2|c|^2$$
$$=2\sinh^2\frac{1}{2}\rho(0,g0)$$

因此我们还有如下结果。

推论8.2.4 若$\langle g,h\rangle$是使Δ保持不变的纯双曲非初等群，A和B是$SL(2,\mathbf{C})$中对应于g和h的矩阵，则

$$\|A-I\|\cdot\|B-I\|\geqslant 2$$

定理8.2.1及其推论与Jorgensen不等式（定理5.4.1）具有相似的特征，两者均意味着g和h不会都与I很接近。不过

后一不等式即

$$|\mathrm{tr}^2(g)-4|+|\mathrm{tr}[g,h]-2|\geqslant 1$$

不能给出什么信息，除非$\mathrm{tr}^2(g)$在3和5之间；相反，定理8.2.1（用乘积而不是和）及其推论对所有的情况都能给出有用的信息。

现在假定R是具有形式Δ/G的任一黎曼曲面，G是非初等纯双曲群。从R上任一点出发构造两条闭曲线$\mathscr{L}_1$和$\mathscr{L}_2$，长度分别为l_1和l_2。除非由$\mathscr{L}_1$和$\mathscr{L}_2$到Δ的提升所得到的相应的群$\langle g,h\rangle$是初等群（而这种情况只有在$\mathscr{L}_1$或$\mathscr{L}_2$同伦于它的起点，或者$\mathscr{L}_1$和$\mathscr{L}_2$都同伦于一条单一闭曲线的某个倍数时才会出现，这时$\langle g,h\rangle$是循环群），否则由定理8.2.1（及6.2节）有

$$\sinh\left(\frac{1}{2}l_1\right)\sinh\left(\frac{1}{2}l_2\right)\geqslant 1$$

下一个例子表明，定理8.2.1中的下界是最佳下界。

例8.2.5 在Δ内作四条测地线L_j（如图8.2.1），设g是以1和-1为不动点的双曲元素，把L_1映为L_2；h是以i和-i为不动点的双曲元素，把L_3映为L_4，命$G=\langle g,h\rangle$，显然，G是非初等群。

对$G_1=\langle g\rangle$，$G_2=\langle h\rangle$以及由L_j围成的区域D应用定理5.3.15，即知G是Δ上的不连续群。由后面（第九章）的结果知G是纯双曲群（D是G的基本域，在$\widetilde{D}$上不会有椭圆或抛物元素的不动点）。因此满足定理8.2.1的假设条件。

在这个例子中，原点位于g和h的轴上，由定理7.18.1有

$$\sinh\frac{1}{2}\rho(0,g0)\ \sinh\frac{1}{2}\rho(0,h0)$$

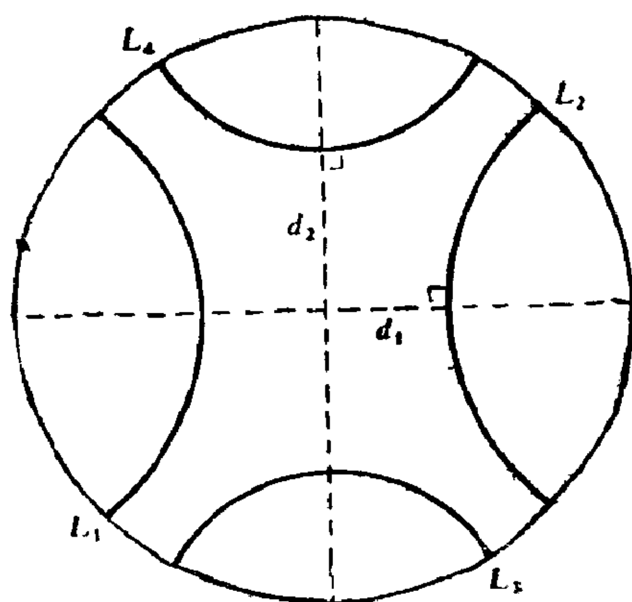


图 8.2.1

$$=\sinh\left(\frac{1}{2}T_g\right)\sinh\left(\frac{1}{2}T_h\right)$$

$$=\sinh(d_1)\sinh(d_2)$$

$$=\cosh\rho(L_2,L_4)$$

因为可以构作这样的测地线使$\rho(L_2,L_4)$任意小，所以定理8.2.1中的下界是最佳下界。

[定理8.2.1的证明]　先证明若$\langle g,h\rangle$是非初等纯双曲群则(8.2.1)式成立。我们并未假定$\langle g,h\rangle$是离散群；实际上，离散性可从(8.2.1)式导出。

设A_g和A_h是g和h的轴。因$\langle g, h\rangle$是非初等群，这些轴或相交或不相交。回忆定义8.1.5，知下列三种情况之一必定出现。

情况1　A_g与A_h相交。

情况2　g和h都是非简单元素。

情况3　A_g与A_h不相交并且g是简单元素（不失一般性）。

在情况2中，可就$n=2$应用推论7.39.5，由A_g的像与A_g相交而得到

$$\sinh\left(\frac{1}{2}T_g\right)\geqslant 1$$

类似的不等式对h也成立，因而

$$\sinh\left(\frac{1}{2}T_g\right)\sinh\left(\frac{1}{2}T_h\right)\geqslant 1$$

由定理7.39.4知，此式对情况1也成立。应用定理7.35.1，我们发现在情况1和2中均有

$$\begin{aligned}\sinh\frac{1}{2}\rho(z,gz)\sinh\frac{1}{2}\rho(z,hz) &= \cosh\rho(z,A_g)\cosh\rho(z,A_h)\\ &\times\sinh\left(\frac{1}{2}T_g\right)\sinh\left(\frac{1}{2}T_h\right)\geqslant 1\end{aligned}$$

而这就是（8.2.1）式。

对情况3证明（8.2.1）式要困难得多。由g是简单元素，$\langle g,h\rangle$是非初等群，测地线A_g与$h(A_g)$不相交知，三条测地线A_g，A_h，$h(A_g)$两两不相交，且可经适当的等距变换化为如图8.2.2所示的情况（先作L_0然后作L，使得h是关于L_0的反射再加上关于L的反射）。

应用定理7.19.2，我们有

$$\begin{aligned}\cosh T_h\sinh^2\rho(A_g,A_h) &= \cosh^2\rho(A_g,A_h)\\ &+\cosh\rho(A_g,hA_g)\end{aligned}$$

因此

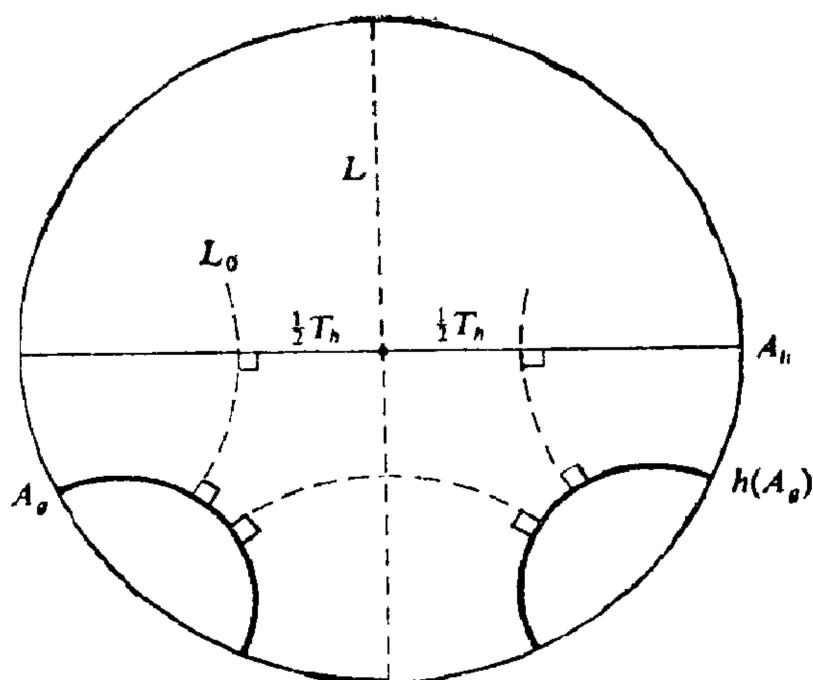


图 8.2.2

$$\cosh^2\rho(A_g, A_h)[\cosh T_h - 1] \geqslant 2\sinh^2\frac{1}{2}\rho(A_g, hA_g)$$

$$= 2\sinh^2\rho(A_g, L)$$

而这意味着

$$\cosh\rho(A_g, A_h)\sinh\left(\frac{1}{2}T_h\right)$$

$$\geqslant \sinh\rho(A_g, L) \qquad (8.2.2)$$

作直线$L_n(n\in\mathbf{Z})$正交于A_g，使得若以σ_j表示关于L_j的反射，就有$\sigma_n\sigma_0 = g^n$（或g^{-n}）；于是$\rho(L_0, L_n) = \frac{1}{2}nT_g$。没有$L_n$会与$L$相交，因若相交，则

$$\sigma_n\sigma = (\sigma_n\sigma_0)(\sigma_0\sigma) \in G$$

(σ表示关于L的反射，从而$\sigma_0\sigma$是h或h^{-1}）而这是一个以L_n与L的交点为不动点的椭圆元素。这就推出对于n的某个值m，直线L_m，L_{m+1}如图8.2.3所示。为了使有关的特性更加醒目，经过一个等距变换，将其化为如图8.2.4所示的情形。

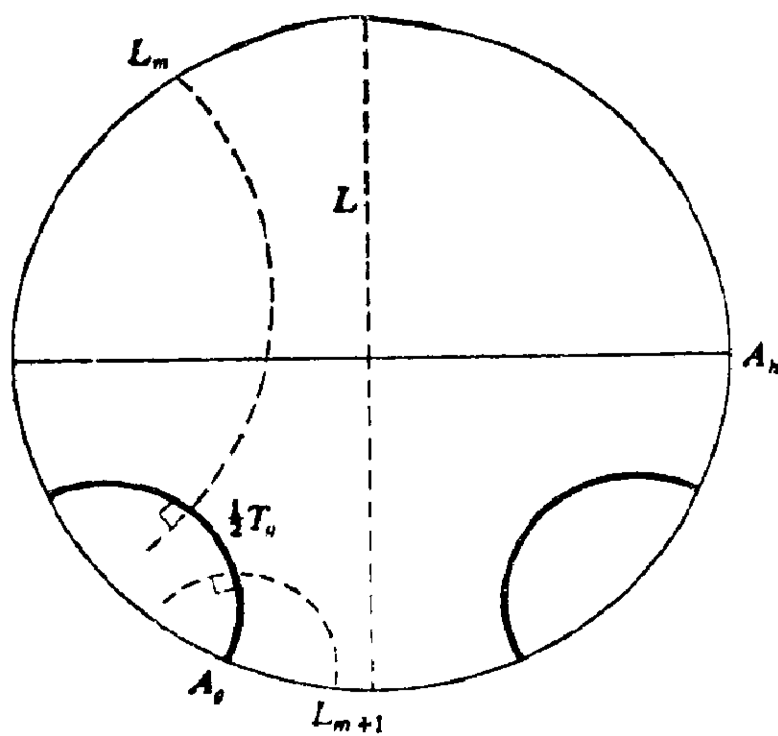


图 8.2.3

不失一般性设$d_1 \leqslant d_2$，从而

$$d_1 \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}T_g\right)=\frac{1}{4}T_g$$

应用定理7.18.1得到

$$\sinh\left(\frac{1}{4}T_g\right)\sinh\rho(A_g, L) \geqslant \sinh(d_1)\sinh\rho(A_g, L)$$

$$=\cosh\rho(L_{m+1}, L) \geqslant 1$$

利用此式我们又可得

$$\sinh\left(\frac{1}{2}T_g\right)\sinh\rho(A_g,L)=2\sinh\left(\frac{1}{4}T_g\right)$$

$$\times\cosh\left(\frac{1}{4}T_g\right)\sinh\rho(A_g,L)$$

$$\geqslant 2$$

联系（8.2.2）式，这即意味着

$$\cosh\rho(A_g,A_h)\sinh\left(\frac{1}{2}T_g\right)\sinh\left(\frac{1}{2}T_h\right)\geqslant 2 \tag{8.2.3}$$

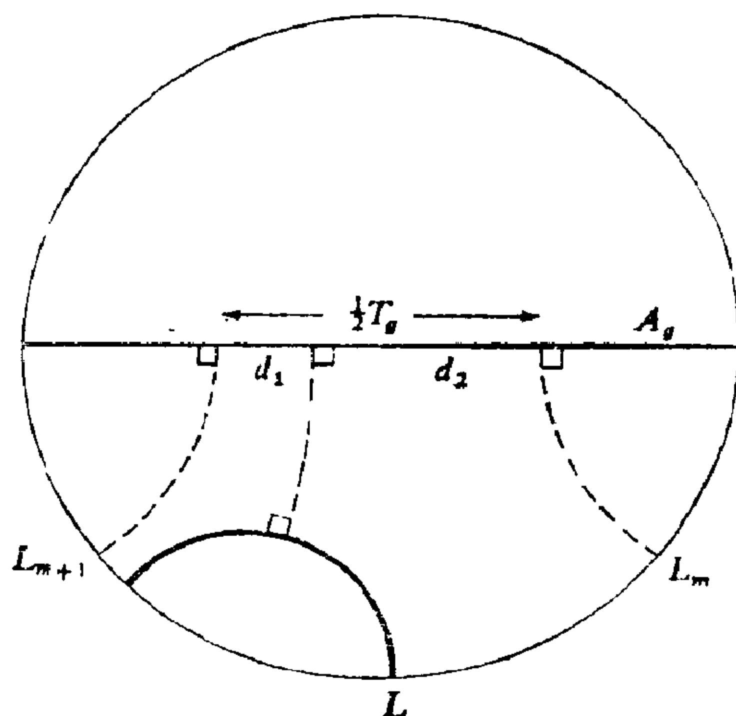


图 8.2.4

注意到

$$2\cosh\rho(z,A_g)\cosh\rho(z,A_h)$$

$$\geqslant\cosh[\rho(z,A_g)+\rho(z,A_h)]\geqslant\cosh\rho(A_g,A_h)$$

由（8.2.3）式有

$$\cosh\rho(z,A_g)\sinh\left(\frac{1}{2}T_g\right)\cosh\rho(z,A_h)$$

$$\times\sinh\left(\frac{1}{2}T_h\right)\geqslant 1$$

而由定理7.35.1知，这就是（8.2.1）式。

为完成定理8.2.1的证明，我们必须证明任何纯双曲群G或为离散群或为初等群。假定G是纯双曲群但不是离散群，则在G内存在互不相同的双曲元素g_n使得$g_n\to I$。这推出

$$\rho(0,g_n0)\to 0$$

且可通过舍弃某些g_n而设对于所有的n有

$$\sinh\frac{1}{2}\rho(0,g_n0)<1$$

从证明的第一部份可以看出，对所有的m和n，群$\langle g_m,g_n\rangle$是初等的。由于G没有抛物元素，g_n和g_m不可能只有单个公共不动点（定理4.3.5），因此存在不同的两个点u和v是每个g_n的不动点。

最后，对于G中每个元素h（$h\neq I$）有

$$\sinh\frac{1}{2}\rho(0,h0)\sinh\frac{1}{2}\rho(0,g_n0)\to 0$$

因而当n充分大时$\langle g_n,h\rangle$是初等群。作上述同样的推导推出h以u和v为不动点，由h是G的任一元素知G是初等群。□

［定理8.2.1的代数证明］　我们只证G是离散群（虽然作更充分的讨论也能推出（8.2.1）式）。

设G是作用在H^2上的非初等群，从定理5.1.3知G包含双

曲元素，不妨设G的一个双曲元素为

$$h=\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & \frac{1}{u} \end{pmatrix}, \quad u>0$$

在G内选取任一序列

$$g_n=\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}, \qquad a_nd_n-b_nc_n=1$$

使得$g_n\to I$。若要证明G是离散群，则必须证明对所有充分大的n有$g_n=I$。计算表明

$$\mathrm{tr}[h,g_n]=2-b_nc_n\ (u-\frac{1}{u})^2\to 2 \qquad (n\to\infty)$$

这是因为$g_n\to I$而有$b_nc_n\to 0$。由于G是纯双曲群，G中元素的迹不可能取区间(-2,2)中的值，因而对于所有充分大的n有$b_nc_n\leqslant 0$。

记

$$f_n=[h,g_n]=\begin{pmatrix} A_n & B_n \\ C_n & D_n \end{pmatrix}$$

$A_nD_n-B_nC_n=1$。由$g_n\to I$而有$f_n\to I$，完全同样的理由表明对所有充分大的n有

$$B_nC_n\leqslant 0$$

然而计算表明

$$\mathrm{tr}[h,f_n]=2-B_nC_n\left(u-\frac{1}{u}\right)^2$$

$$=2+b_nc_n(1+b_nc_n)\left(u-\frac{1}{u}\right)^4$$

因而对所有充分大的n有

$$b_nc_n\geqslant 0$$

这就推出对所有充分大的n有

$$b_nc_n=0$$

这意味着对于这些n，双曲元素h和g_n具有一个公共不动点。由定理5.1.3知，G含有三个双曲元素h_1,h_2,h_3，其中的任何两个元素都没有公共不动点。由此推出当n充分大时每个g_n都有三个不动点（同每个h_j有一个公共不动点），因而$g_n=I$。

〔几何解释〕 证明的思路是从换位子不是椭圆元素这一事实来提取信息的。h的轴A和$g_nhg_n^{-1}$的轴$g_n(A)$即不可能接近，也不可能不交，否则〔g_n,h〕是椭圆元素（推论7.38.5）；即有条件$b_nc_n\leqslant 0$。事实上，A是正虚轴，$g_n(A)$是以b_n/d_n和a_n/c_n为端点的测地线，A和$g_n(A)$的反积为

$$(A,g_n(A))=\frac{\frac{1}{2}\left|(b_n/d_n)+(a_n/c_n)\right|}{\frac{1}{2}\left|(b_n/d_n)-(a_n/c_n)\right|}$$

$$=|1+2b_nc_n|$$

这表明当$|b_nc_n|$很小时$b_nc_n\leqslant 0$（否则A和$g_n(A)$接近且不交）。

由$b_nc_n\to 0$，知对于充分大的n，轴A和$g_n(A)$相交或平行，并且$b_nc_n\leqslant 0$。如果相交则交角很小（因为$b_nc_n\to 0$），定理7.38.6表明换位子

$$f_n=[h,g_n]$$

的平移长度很小并且它的轴与A相交。这就推出h的轴A与$f_n h f_n^{-1}$的轴$f_n(A)$接近而不交，因而第二个换位子$[h, f_n]$是椭圆元素。由于这种情况不可能发生，因而A与$g_n(A)$有一个公共的端点，即$b_n c_n = 0$。

作为一种不同的解释，注意到$b_n c_n \to 0$与$b_n c_n \neq 0$意味着存在h的一列共轭元素的轴$g_n(A)$收敛于h的轴A，但这显然与离散性相违。 □

值得注意的是，定理8.2.1的代数证明实际上证明了：只要G没有椭圆元素，G就是离散群。我们将其写成下面的定理；下一节将给出这个定理的几何证明。

定理8.2.6 设G是双曲平面等距映射的非初等群。若G不含椭圆元素，则G是离散群。

习题 8.2

1. 验证定理8.2.1代数证明的几何解释的各个细节。

2. 证明：若G是H^2上不含椭圆元素的等距映射群，并且$g: z \mapsto z+1$属于G，则对于G中所有的元素

$$h(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad (ad-bc=1)$$

有$c=0$或$|c| \geqslant 4$〔提示：考虑对应于$g^n h$的矩阵的迹〕。

§ 8.3 不含椭圆元素的群

现在我们给出定理8.2.1的直接推广，即允许群内有抛物元素（但不含椭圆元素）。与定理8.2.1以及推论8.2.2，8.2.3，8.2.4相同的结论仍然成立；不过，读者首先会从阅

读定理8.2.1的证明中获得教益。允许有椭圆元素的更一般的结果将在8.4节及第十一章中加以研究。

定理8.3.1 若G是双曲平面等距映射群，且不含椭圆元素，则G或为初等群或为离散群。进而，若$g, h \in G$并且$\langle g, h\rangle$是非初等群，则对于所有的$z \in \Delta$均有

$$\sinh\frac{1}{2}\rho(z,gz)\sinh\frac{1}{2}\rho(z,hz)\geqslant 1 \qquad (8.3.1)$$

且此估计为最佳估计。

[证] 例8.2.5表明这个下界是最佳的；事实上，由于现在G可以包含抛物元素，在那个例子中我们可以作四条测地线依次相切，因此（8.3.1）式中的下界是可以达到的。

现在设G是不含椭圆元素的任一非初等群。定理8.2.6表明G是离散群，不过我们宁可不顾这一事实而保持定理8.2.1的几何证明的精神。如果G不含抛物元素，这就是定理8.2.1的结果，因此不妨设G包含一些抛物元素。

设G是作用在H^2上，G中某个抛物元素以∞为不动点，比如说这个元素为$h(z)=z+1$。如果G含有以∞为不动点的双曲元素f，不妨设原点也是f的不动点，即$f(z)=kz$，因而G包含平移$z\mapsto z+t$，t可任意小；见图8.3.1。于是，G所包含的平移$z\mapsto z+t$，其t的集合T在$\mathbf{R}$内稠密。

由G是非初等群可知，必有双曲元素g不以∞为不动点。因此存在以∞为端点的测地线L_0及g的等距圆周L使得$g=\sigma_0\sigma$，其中σ_0和σ分别是关于L_0和L的反射。因T在$\mathbf{R}$内稠密，故存在与L相交的测地线L^*使得$\sigma^*\sigma_0$是G中的欧氏平移，此处的σ^*是关于L^*的反射。从而$\sigma^*\sigma$是G的椭圆元素，矛盾。我们证明了：G的抛物元素的不动点不是G的任何双曲元素的

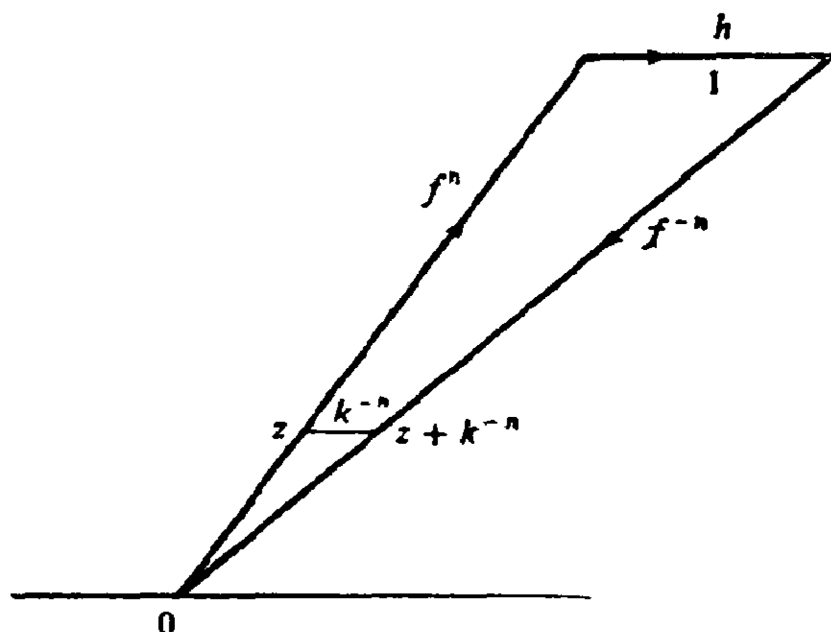


图 8.3.1

不动点（试比较定理5.1.2，离散性是该定理的假设条件）。

用完全相同的方法可以证明：**G的任何抛物不动点的稳定核是G的抛物元素的离散子群，因而是循环群。**

现在考虑G内任何两个使$\langle g,h\rangle$为非初等群的元素g和h。如果g和h都是双曲元素，则两者不可能有单一的公共不动点（否则$[g,h]$是抛物元素，这种情况前面已经排除）。对所有的其它情形，在定理8.2.1的证明中给出的（8.3.1）式（即(8.2.1)式)的证明仍然有效，因此只剩下考虑如下情况。

情况4 h**是抛物元素，**g**是抛物或双曲元素。**

不妨设$h(z)=z+1$且h生成∞的稳定核，这是因为对于所有非零整数n有

$$\sinh\frac{1}{2}\rho(z,hz)\leqslant\sinh\frac{1}{2}\rho(z,h^nz)$$

取

$$g(z)=\frac{az+b}{cz+d},\qquad ad-bc=1$$

使得$g(\infty)\neq\infty$，因而$c\neq 0$。L_0如前述，L_n是由$L_0+n/2$确定的竖直测地线，于是$\sigma_n\sigma_0=h^n$。上述理由表明，没有一条直线L_n能够同g的等距圆周相交，故必有$2/|c|\leqslant 1/2$，即

$$|c|\geqslant 4$$

现在假设g以u和v为不动点（两点可以重合但不为∞）。则当u和v为实数时有

$$\begin{aligned}|z-g(z)|\cdot|cz+d|&=|z(cz+d)-(az+b)|\\&=|c|\cdot|z-u|\cdot|z-v|\\&\geqslant|c|\,y^2\\&\geqslant 4y^2\end{aligned}$$

应用定理7.2.1得到

$$\begin{aligned}&\sinh\frac{1}{2}\rho(z,gz)\sinh\frac{1}{2}\rho(z,hz)\\&=\frac{|z-g(z)|}{2(y\operatorname{Im}[gz])^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{1}{2y}\\&=|z-g(z)|\cdot|cz+d|/4y^2\\&\geqslant 1\end{aligned}$$

这就完成了情况4的证明。

G的离散性可用证明定理8.2.1的方法推出。 □

§ 8.4 离散性准则

在前面一些结果的基础上可以得出如下定理。

定理8.4.1　若G是双曲平面等距映射的非初等群，则下列命题等价。

(1) G是离散群；

(2) G是Δ上的不连续群；

(3) G的椭圆元素的不动点在Δ内无聚点；

(4) G的椭圆元素不以I为聚点；

(5) G的每个椭圆元素都是有限阶元素；

(6) G的每个循环子群都是离散群；

证明的框架如下图所示；实箭头($A\to B$意味着A蕴含B)表示结论显然或已知，虚箭头所包含的结论将在下面证明之。

注：若G不含椭圆元素，则可由前面的理论知所有六个条件都是正确的，因此我们假定G含有椭圆元素。

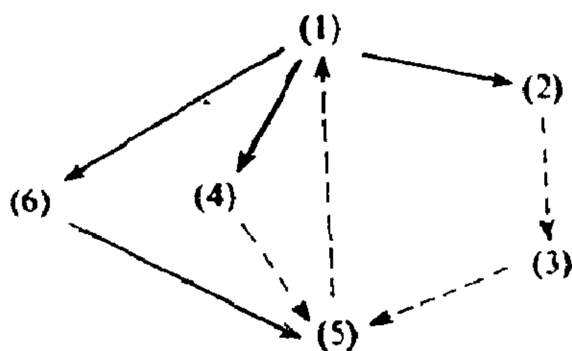


图 8.4.1

〔(2)蕴含(3)的证明〕　在Δ内任取一点z及z的任一紧邻域N。由条件(2)知，G中使$g(N)$与N相交的元素g的集合是有限集，因此只有有限多个不动点属于N。　□

〔(3)蕴含(5)的证明〕　若(5)不成立，则G含有一个无限阶椭圆元素g。如果g以v为不动点，则点$g^n(z)$　($n\in\mathbf{Z}$)在以v为圆心以$\rho(z, v)$为半径的双曲圆周上稠密。因为G是

非初等群，故存在某个f使得$f(v)\neq v$，从而点$g^n f(v)$都是椭圆不动点，它们在Δ内有聚点。 □

〔(4)蕴含(5)的证明〕 若(5)不成立，不妨假设G包含$g(z)=\exp(2\pi i\theta)z$，θ是无理数。数$\exp(2n\pi i\theta)$ $(n\in Z)$在单位圆周上稠密，因此对于一个适当的子序列有$g^n\to I$。 □

〔(5)蕴含(1)的证明〕 可将G视为矩阵群，设G_0是G的任何有限生成子群。由Selberg的一个结果知（见2.2节），G_0包含一个具有有限指数的子群G_1，它不含有限阶元素。

由条件(5)成立知G_1不含椭圆元素，故由定理8.3.1可推出G_1是离散群。容易看出，因G_1关于G_0具有有限指数，子群G_0也是离散群。最后，由定理5.4.2知G本身也是离散群。 □

§ 8.5 Nielsen区域

设G是双曲平面Δ上的Fuchs群，本节我们将研究非空G-不变凸集。

首先设G属于第一类。在这种情形下，每一点的轨道均以$\partial\Delta$的每一点为聚点，因此任何非空G-不变凸集必定是整个双曲平面。

再设G属于第二类。则$\partial\Delta$是G的极限集Λ同互不相交开弧σ_j的可数并的不相交并集。设L_j是与σ_j具有相同端点的测地线，H_j是由L_j界成的开半平面，它被L_j同σ_j隔开。因集合$\{\sigma_j\}$是G-不变的，集合$\{H_j\}$亦然，故

$$N = \bigcap_j H_j \tag{8.5.1}$$

是Δ的G-不变凸子集。若G是非初等群，则Λ是无限集，因此N是非空集。由于在这种情形下还有无限多个弧σ_j，因而当$j\to\infty$时σ_j的欧氏长度趋于零。这意味着每个开圆盘$\{|z|<r\}$ $(r<1)$位于除有限个H_j之外的所有H_j中，而这又意味着N是开集。综上所述，N是Δ的非空G-不变开凸子集。

定义8.5.1 设G是Δ上的非初等$Fuchs$群。若G属于第二类，则命N为（8.5.1）式定义的集；若G属于第一类，则命$N=\Delta$，且称N为G的$Nielsen$**区域**。

下一个结果表明，N可不必借助无穷远圆周来定义。

定理8.5.2 N是Δ的**最小非空G-不变开凸子集**。

〔证〕 因为除最小二字以外这些性质N都具备，我们必须证明任何非空G-不变开凸集E包含N。由E非空且G-不变知，它包含的某个G-轨道以Λ的每一点为聚点。这就推出$\overline{E}\supset\overline{N}$。因对任何开凸集$A$均有$(\overline{A})^0=A$，故有$E\supset N$。

习题 8.5

1．仔细证明对于每一点z有$C(z)\supset N$，此处的$C(z)$是z的G-轨道的凸包。

§ 8.6 注 记

关于$Fuchs$群的一般论述，建议读者参阅〔30〕，〔52〕〔57〕，〔103〕和〔114〕。本章所探讨的几何思想源于$Fenchel$和$Nielsen$的工作（例如可参看〔29〕，〔99〕）。定理8.2.1的代数证明由〔95〕给出，这是我所知的最好的证明。定理8.3.1是新的。8.4节中的思想来源于〔42〕。

第九章　基本域

§9.1　基　本　域

设G是作用在双曲平面Δ（或H^2）上的一个Fuchs群。所谓关于G的**基本集**是指Δ的一个子集F，它恰好包含Δ中每条轨道的一个点。因此，F中的任何两个点都不是G-等价的，并且

$$\bigcup_{f\in G} f(F)=\Delta$$

选择公理保证了关于G的基本集的存在性（不过有少数例外）。所谓基本域是一个区域，这个区域添上它的部份边界构成关于G的基本集。

定义9.1.1　双曲平面的子集D是关于Fuchs群G的**基本域**当且仅当

(1)　D是区域；

(2)　存在某个基本集F满足$D\subset F\subset\widetilde{D}$；

(3)　h-area $(\partial D)=0$

我们将在9.4节中建立基本域的存在性。如果D是基本域，则对G中所有的g（$g\neq I$）有

$$g(D)\cap D=\phi,\qquad \bigcup_{f\in G} f(\widetilde{D})=\Delta$$

并说D和它的像**镶成**Δ。

注9.1.2：以要求∂D的每一点是∂D上别的点的像来代替条件（2）是不够的。例如，由$z\mapsto 2z$生成的群是H^2上的不连续群，但具有这种性质的集$\{x+iy: y>0, 1<x<2\}$不是关于G的基本域。

定义9.1.1的性质（2）和（3）意味着F是可测的，并且

$$\text{h-area}(D)=\text{h-area}(F)$$

事实上，下一个定理表明h-area(D)只依赖于G且与D的选取无关。以后（10.4节）将会看到在所有情况下都有

$$\text{h-area}(D)\geqslant \frac{\pi}{21}$$

定理9.1.3 若F_1和F_2是关于G的可测基本集，则

$$\text{h-area}(F_1)=\text{h-area}(F_2)$$

若F_0是关于G内指数为k的子群G_0的可测基本集，则

$$\text{h-area}(F_0)=k\cdot \text{h-area}(F_1)$$

［证］ 以μ表示h-area。因μ是每个等距映射下的不变量，故有

$$\begin{aligned}\mu(F_1)&=\mu(F_1\cap[\bigcup_g gF_2])\\&=\sum_g \mu(F_1\cap gF_2)\\&=\sum_g \mu(F_2\cap g^{-1}F_1)\\&=\mu(F_2)\end{aligned}$$

把G表示成陪集的不相交并，比如说

$$G=\bigcup_g G_0 g_n$$

设

$$F^*=\bigcup_n g_n(F_1)$$

若$w\in\Delta$，则对G中某个g有$g(w)\in F_1$，且对某个n和G_0中某

个h有$g^{-1}=h^{-1}g_n$。故$h(w)\in g_n(F_1)$，从而F^*至少包含每条轨道的一个点。

现在假定z和$f(z)$属于F^*，其中$f\in G_0$，并且z不是G的任何非平凡元素的不动点。对于某个m和n，点$g_n^{-1}(z)$，$g_m^{-1}(z)$属于F_1，从而$g_ng_m^{-1}f$以z为不动点。我们推出

$$g_mg_n^{-1}=f\in G_0$$

故$G_0g_m=G_0g_n$，因而$n=m$。这表明f以z为不动点，于是$f=I$。

这些事实表明F^*不仅恰好包含每条不含不动点的轨道上的一个点，而且还至少包含每条含不动点的轨道上的一个点。在F^*中删去一个适当的不动点（可数）集合，就得到关于G_0的基本集，由证明的第一部份有

$$\mu(F^*)=\mu(F_0)$$

显然，F_1与它的像的交集至多是由可数个不动点组成的集合，因此

$$\mu(F^*)=\sum_n\mu(g_nF_1)$$

$$=k\mu(F_1) \qquad \square$$

可以给出定理9.1.3的商空间叙述。如在6.2节中所讨论的那样，由双曲度量的微分ds可导出商曲面Δ/G上的一个度量，因而定理9.1.3只能断言对于任何可测基本集F有

$$\mathrm{h-area}(F)=\mathrm{h-area}(\Delta/G)$$

习题 9.1

1．设D是关于G的一个基本域。试证明：若$w\in D$，则$D\setminus\{w\}$也是基本域（因而基本域不必是单连通的）。再设$E=(\widetilde{D})^0$（D关于Δ的闭包的内部）。证明E是包含D的单连通基本域。

2．设D是关于G的基本域，D_1和D_2是D的开子集，满足

$$(\widetilde{D}_1 \cup \widetilde{D}_2)^\circ = D$$

试问：在此情形下，区域

$$(g(\widetilde{D}_1) \cup \widetilde{D}_2)^\circ$$

是关于G的基本域吗？

§ 9.2　局部有限基本域

在建立有意义的基本域理论之前需要有另外一个条件。谨以下面的例子说明之。由于我们只是选取了一个最简单的例子来说明这个条件，故其中的群不是Fuchs群的事实无关紧要。

例9.2.1　设C^*是非零复数的集合，G是由g：$z \mapsto 2z$生成的循环群。商空间C^*/G是一个环面。设γ是图9.2.1所示的曲线，在第一象限中γ是曲线$y = e^{-x}$，在其它象限中γ由$|z| = 1$给定。位于γ和$g(\gamma)$之间的区域D是关于G的有如下含义的基本域：C^*的每一个点至少等价于$\overline{D}$的一个点，至多等价于D的一个点。当我们把∂D上的等价点视为同一点时，发现商空间$\overline{D}/G$不是紧的，因此　$\overline{D}/G$与C^*/G不同胚。

同样的情况对Fuchs群也会出现，甚至当D是只具有有限条边的凸多边形时（例9.2.5）也有可能。因而我们希望加上一个条件以排除这种可能性。

设G是作用在Δ上的一个Fuchs群，D是Δ内关于G的一个基本域。群G诱导出一个自然的连续开投影映射π：$\Delta \to \Delta/G$。当然，我们也可以通过把等价点（必位于∂D上）视为同一点来建立由G诱导的$\widetilde{D}$上的一个等价关系，因此当取$\widetilde{D}/G$的拓

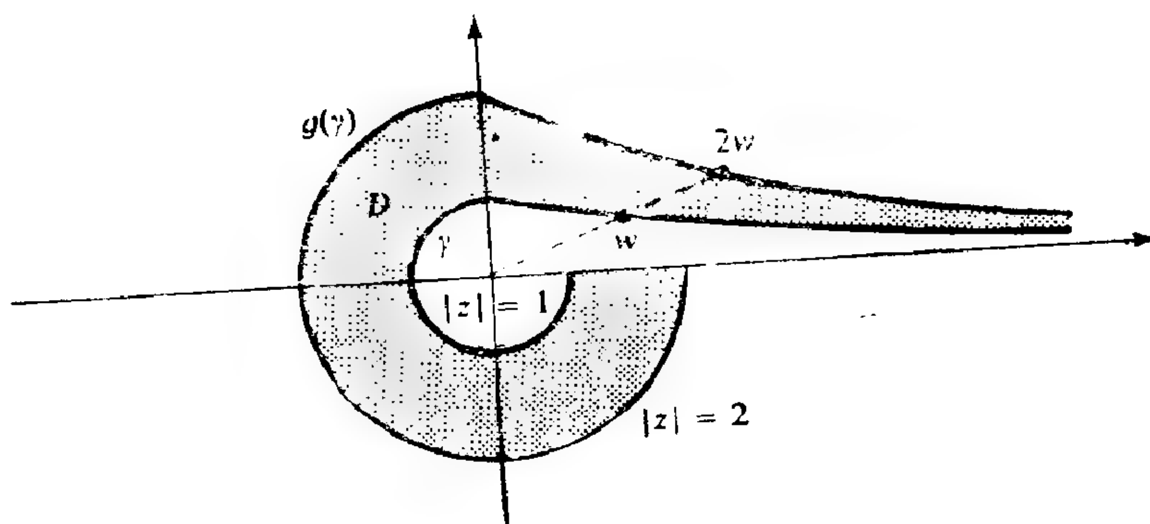


图 9.2.1

扑为商拓扑时就有另外一个连续投影映射$\tilde{\pi}$：$\tilde{D}\to\tilde{D}/G$。Δ/G的元素是轨道$G(z)$，$\tilde{D}/G$的元素是集$\tilde{D}\cap G(z)$，并且

$$\pi(z)=G(z),\qquad \tilde{\pi}(z)=\tilde{D}\cap G(z)$$

以τ：$\tilde{D}\to\Delta$表示包含映射（限制在$\tilde{D}$上的恒等映射）。按照规则

$$\theta:\tilde{D}\cap G(z)\mapsto G(z)$$

构造映射θ：$\tilde{D}/G\to\Delta/G$。因为对每一点z，$\tilde{D}\cap G(z)\neq\phi$，故映射$\theta$是完全确定的，且当然有

$$\theta\tilde{\pi}=\pi\tau \tag{9.2.1}$$

这些映射如图9.2.2所示。

现在来研究$\tilde{D}/G$与Δ/G之间的关系。

命题9.2.2 (i) θ和τ是内射；

(ii) π，$\tilde{\pi}$和θ是满射；

(iii) π，$\tilde{\pi}$，θ和τ是连续映射；

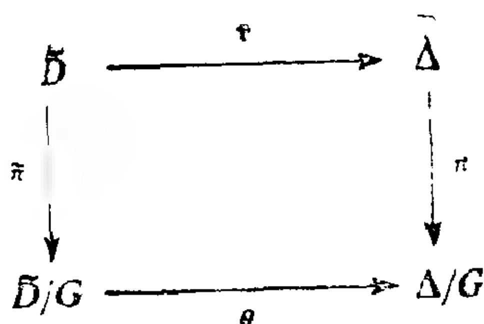


图 9.2.2

(Ⅳ)　π是开映射。

[证]　只有在θ是连续映射时这个断语才不是完全平凡的。若A是Δ/G的任一开集，则可应用（9.2.1）式得到

$$\tilde{\pi}^{-1}(\theta^{-1}A)=\tilde{D}\cap\pi^{-1}(A)$$

由于π连续，这是$\tilde{D}$中的开集。又因对任何B，$\tilde{\pi}^{-1}(B)$是$\tilde{D}$中开集的充要条件是B为$\tilde{D}/G$中开集，故$\theta^{-1}(A)$是$\tilde{D}/G$中开集并且θ是连续的（事实上这就是命题1.4.2）。

现在就来给出一个条件，该条件满足时可保证θ是一个同胚映射，从而Δ/G与$\tilde{D}/G$拓扑等价。

定义9.2.3　称关于G的基本域D为局部有限当且仅当Δ的每个紧子集只同$\tilde{D}$的有限多个G-象相交。

为了搞清楚定义9.2.3的含义，我们假定D局部有限。在Δ中的每点z均有一个紧邻域N，它与$\tilde{D}$的有限多个G-象$g_i(\tilde{D})$相交。必要时通过缩小N，我们可设所有这些象都包含点z。最后，若$h(D)$与N相交，则$h(D)$与$g_i(\tilde{D})$的并相交；因此（由于∂D的测度为零）对某个i有$h=g_i$。综上所述，若D局部有限，则每点z均有一个紧邻域N及伴随着N的一个G的有限子集$g_1,\cdots,g_n$满足

(1)　$z\in g_1(\tilde{D})\cap\cdots\cap g_n(\tilde{D})$

(2) $N \subset g_1(\widetilde{D}) \cup \cdots \cup g_n(\widetilde{D})$;

(3) $h(D) \cap N = \phi$，除非h是某个g_j。

在以下的讨论中，我们将自始至终利用这些事实。

定理9.2.4 当且仅当θ是$\widetilde{D}/G$到Δ/G的同胚映射时D为局部有限基本域。

［证］ 先假定θ是同胚映射，D不是局部有限基本域，我们来寻求矛盾。因D不是局部有限，故存在Δ内某点w，D内的点$z_1, z_2, \cdots$以及G内互不相同的元素g_1，$g_2, \cdots$，满足

$$g_n(z_n) \to w, n \to \infty \tag{9.2.2}$$

记

$$K = \{z_1, z_2, \cdots\}$$

首先有$K \subset D$。其次，w的每个邻域同无限多个互不相同的象$g_n(D)$相交，因此对G中的任何h都有$w \notin h(D)$。这推出

$$\pi(w) \notin \pi(K)$$

我们可以通过证明

$$\pi(w) \in \pi(K) \tag{9.2.3}$$

得到所寻求的矛盾。

因G是离散群，$g_n^{-1}(w)$在Δ内无聚点。由(9.2.2)式可知，z_n在Δ内也无聚点，这表明K是D内闭集。因$K \subset D$，故有

$$\tilde{\pi}^{-1}(\tilde{\pi}K) = K$$

并且由$\widetilde{D}/G$上商拓扑的定义有希望推出$\tilde{\pi}(K)$是$\widetilde{D}/G$内闭集。由(9.2.1)式，有

$$\pi(K) = \pi\tau(K) = \theta(\tilde{\pi}K)$$

因θ是同胚映射，这个集合是Δ/G内闭集。我们断定

$$\pi(w)=\lim\pi(g_n z_n)=\lim\pi(z_n)\in\pi(K)$$

这就是（9.2.3）式。

为了完成定理的论证，我们还必须证明当D局部有限时θ是同胚映射。于是我们假定D局部有限，由命题9.2.1知，只需证明θ把开集映射成开集即可。

在$\widetilde{D}/G$内选取任一非空开集A，因$\widetilde{\pi}$既是连续映射又是满射，故存在Δ内开子集B满足

$$\widetilde{\pi}^{-1}(A)=\widetilde{D}\cap B,\qquad \widetilde{\pi}(\widetilde{D}\cap B)=A$$

令

$$V=\bigcup_{g\in G}g(\widetilde{D}\cap B)$$

则

$$\begin{aligned}\pi(V)&=\pi(\widetilde{D}\cap B)\\&=\pi\tau(\widetilde{D}\cap B)\\&=\theta\widetilde{\pi}(\widetilde{D}\cap B)\\&=\theta(A)\end{aligned}$$

我们要证$\theta(A)$是开集；因π是开映射，只要证明V是Δ的开子集就够了。对此商空间提供不了什么帮助，它只依赖于D是局部有限的假设。

考虑V内任意一点z，必须证明V包含一个含有z的开集N。因V是G-不变的，故可假定

$$z\in\widetilde{D}\cap B$$

由于D是局部有限基本域，因而存在以z为中心的开双曲圆盘N仅与$\widetilde{D}$的象

$$g_0(\widetilde{D}),\quad g_1(\widetilde{D}),\cdots,g_m(\widetilde{D})$$

相交，其中$g_0=I$；并且还可假定这些集合中的每一个都包含z点。于是

$$g_j^{-1}(z)\in\widetilde{D},\ j=0,1,\cdots,m$$

这意味着$\widetilde{\pi}$在$g_j^{-1}(z)$点有定义。显然，$\widetilde{\pi}$把这个点映为A中的$\widetilde{\pi}(z)$，因此

$$g_j^{-1}(z)\in\widetilde{\pi}^{-1}(A)=\widetilde{D}\cap B$$

这就推出$z\in g_j(B)$，通过进一步减小N的半径，不妨设

$$N\subset g_0(B)\cap\cdots\cap g_m(B)$$

显然有$N\subseteq V$。事实上，若$w\in N$，则对某个j，w既属于$g_j(\widetilde{D})$又属于$g_j(B)$，从而有

$$w\in g_j(\widetilde{D}\cap B)\subseteq V$$

定理证明完毕。 □

下面，我们给出一个例子，说明凸性不足以保证局部有限性。 □

例9.2.5　我们将给出一个凸五边形，它是一个Fuchs群G的基本域但却不是局部有限的。这个群G是由

$$f(z)=2z,\qquad g(z)=\frac{3z+4}{2z+3}$$

生成的作用于H^2上的群。我们的首要任务是证明G是离散群并确定关于G的一个基本域。为此可考虑图9.2.3。

计算表明$f(\gamma_1)=\gamma_2$，$g(\sigma_1)=\sigma_2$。定理5.3.15的简单应用（取$G_1=\langle f\rangle$，$G_2=\langle g\rangle$，D_1是γ_1与γ_2之间的区域，D_2是σ_1与σ_2之间的区域）表明G是离散群，并且对于任何$h\in G$，$h\neq I$有$h(D)\cap D=\phi$，此处的D是由γ_1，γ_2，σ_1和σ_2围成的区域。

事实上，D就是G的一个（局部有限）基本域。为说明这一点，我们取定H^2中任意一点z，并选取z的一个与$i\sqrt{2}$

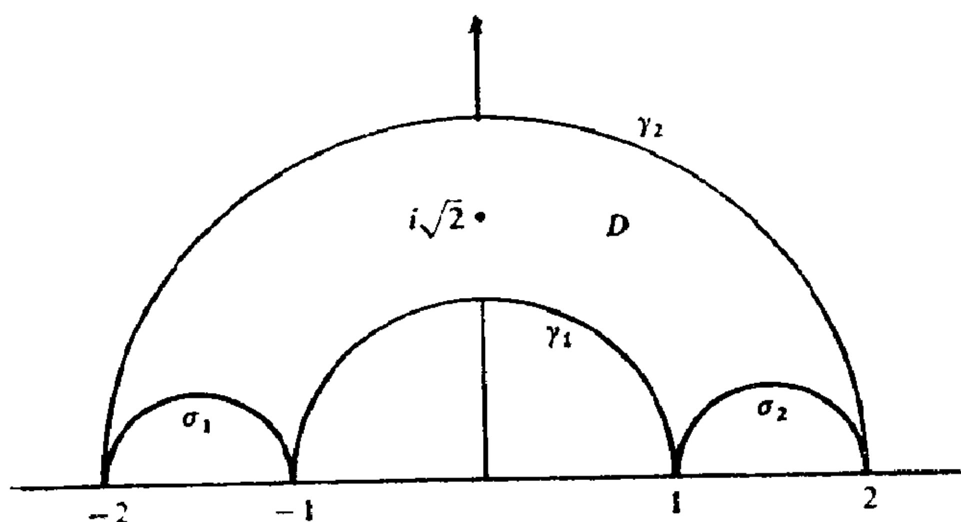


图 9.2.3

最接近的象点（由于G是离散群，这是可行的）。不妨设z本身就是它的最接近$i\sqrt{2}$的象点。容易看出，当且仅当$|z|\leqslant 2$时

$$\rho(z,i\sqrt{2})\leqslant\rho(z,f(i\sqrt{2}))=\rho(f^{-1}z,i\sqrt{2})$$

同理，当且仅当$|z|\geqslant 1$时z与$i\sqrt{2}$比z与$f^{-1}(i\sqrt{2})$更接近。通过稍微复杂一些的计算(应用定理7.2.1)或几何关系，我们发现z或位于D的外部或位于σ_1和σ_2上，这是因为

$$\rho(z,i\sqrt{2})\leqslant\rho(gz,i\sqrt{2})=\rho(z,g^{-1}(i\sqrt{2}))$$

而对g^{-1}也有类似的关系式。这就推出$z\in\overline{D}$，即证明了D是G的一个基本域。

通过修改D我们设法得到一个新的基本域Σ。这一过程的基本点是将D的一些部分代之以这些部分的不同的象，使得修改后的区域仍然是一个基本域。首先，我们将

$$D_1=D\cap\{z:\mathrm{Re}[z]<0\}$$

代之以$g(D_1)$；新区域如图9.2.4所示，这仍然是G的基本域。

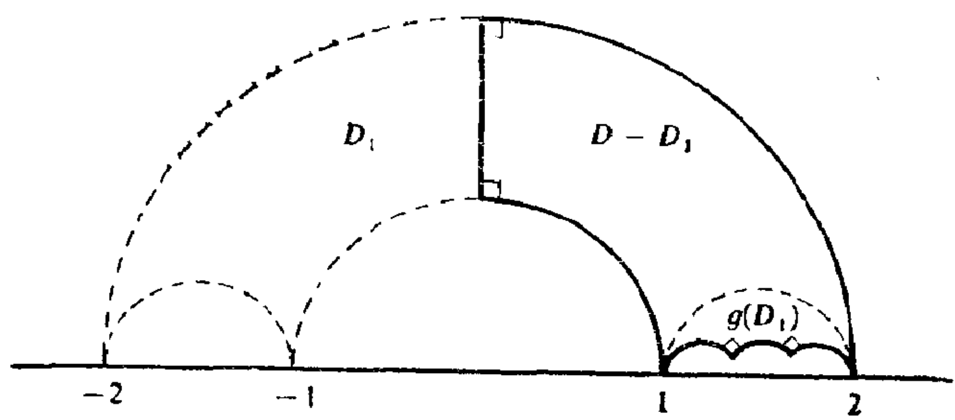


图 9.2.4

其次，作竖直测地线$x=1$和$x=2$，并设w, ζ和ζ'是如图9.2.5所示的点。将以w，1，$2w$为顶点的闭三角形$T(w,1,2w)$代之以三角形$T(2w,2,4w)$（这是原三角形T的象$f(T)$）。每条欧氏线段$[\zeta, 2\zeta]$代之以等价线段$[\zeta', 2\zeta']$，其中ζ位于$|z|=1$上且仅限于w与i之间。最后，要删去线段$[i, 2i]$；需要注意的是，线段$[i, 2i]$等价于$g(D_1)$边界上的双曲线段$[g(i), g(2i)]$，当保留这条线段时，新区域Σ仍然是这样的一种区域，即它的闭包至少包含每条轨道上的一个点。

上面所给出的构造，是用以$1, g(i), g(2i), 2, \infty$为顶点的五边形代替四边形$D$。由构造过程可知$\Sigma$是$G$的基本域，由定理7.16.1又可知，$\Sigma$是凸集。注意到边界线段$[g(i), g(2i)]$上的点在$\partial\Sigma$上无等价点；唯一的可能是$\Sigma$的象沿着线段$[g(i), g(2i)]$凝聚（见下文）。要想更明确

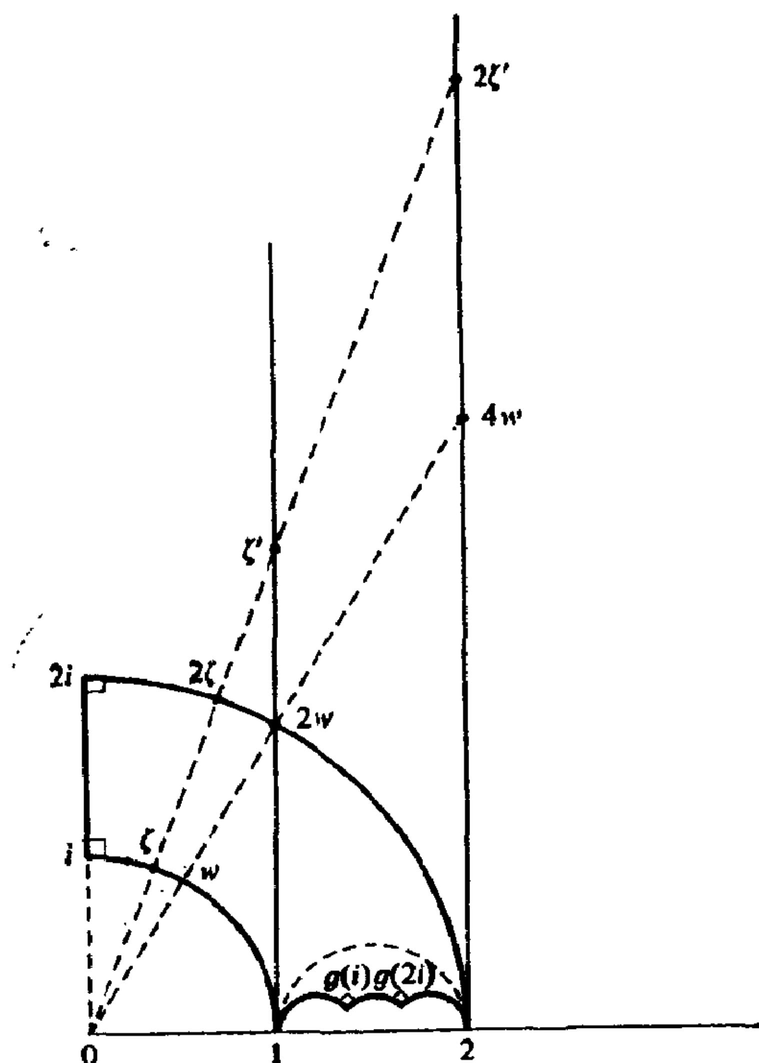


图 9.2.5

地证明Σ不是局部有限的，我们只需注意到点$z_n = 1 + 2^n i$，$n = 1, 2, \cdots$都属于$\widetilde{\Sigma}$，且

$$f^{-n}(z_n) = i + 2^{-n} \to i \quad , \quad n \to \infty$$

我们断定Σ是一个凸的非局部有限的基本域。由于开头的区域D局部有限，商空间H^2/G同胚于$\widetilde{D}/G$，这是除去一点的环面。读者应当考察一下$\widetilde{\Sigma}/G$和Σ到H^2/G的射影。 □

考虑到定理9.2.4和例9.2.5，引入如下局部有限基本域

的判定准则是有意义的。

定理9.2.6 设D是Fuchs群G的基本域。若对于∂D上每一点z均有

(i) 存在G中某个元素$g\neq I$使得$g(z)\in\partial D$

(ii) 可以用一条完全位于$D\cup\{z\}$内的曲线把z和D内的一点连接起来

则D是局部有限的。

〔证〕 条件(1)或(2)都不足以保证D局部有限。此处只就D是凸域这一最有趣的情况作一概略的证明(凸性比条件(2)强)。

Δ中的一点z,若存在一个邻域只与$\tilde{D}$的有限多个象集相交,则称z为正则点;若z不是正则点,则称其为例外点。引入这些概念只是为了方便。

于是,若不存在例外点,D便是局部有限的。我们将通过证明:

(a) 例外点的集合是可数集

(b) 若存在一个例外点,则必存在不可数个例外点

来证明D局部有限。

由条件(1)知,每个例外点z必属于某个集合$g(\tilde{D})\cap h(\tilde{D})$,$g\neq h$。由凸性可推出交集

$$\sigma(g,h)=g(\tilde{D})\cap h(\tilde{D})$$

(为一双曲线段)的内点都是正则点;因此,在$\sigma(g,h)$中至多有两个例外点。因G是可数集,故推出(a)。

为了证明(b),设w是例外点,则存在D中的点$z_1,z_2,\cdots$以及G内互不相同的元素$g_1,g_2,\cdots$使得$g_n(z_n)\to w$。不妨设D关于双曲度量是无界集(因为若$\tilde{D}$是紧集,则D显然是局

部有限的），因而存在$\overline{D}$中某点ζ满足$|\zeta|=1$。若L_n是射线$[z_n,\zeta)$，则$g_n(L_n)$凝聚于某条射线$[w,\zeta^*)$，$|\zeta^*|=1$；由$[w,\zeta^*)$的构成可知，它的每一点都是例外点。 □

从定理9.2.4，我们可清楚地看出局部有限性概念的重要性。在结束本节之前，我们再介绍几个为所有局部有限基本域共同具有的性质；需要特别指出的是，这些性质都是从局部有限性派生出来的，对D并未附加任何其它条件。

定理9.2.7 若D是Fuchs群G的任一局部有限基本域，则

$$G_0=\{g\in G: g(\widetilde{D})\cap\widetilde{D}\neq\phi\}$$

生成G。

[证] 设G^*是由G_0生成的群。不妨设G是作用在Δ上的群，故对Δ内任何一点z，存在G中某个元素g使得$g(z)\in\widetilde{D}$。再设$h(z)\in\widetilde{D}$，则$h(z)$既属于$\widetilde{D}$也属于$hg^{-1}(\widetilde{D})$，因此$hg^{-1}\in G_0$；于是有陪集的等式

$$G^*h=G^*g$$

这一事实意味着存在一个完全确定的映射

$$\phi:\Delta\to G^*\backslash G$$

由式

$$\phi(z)=G^*g$$

给出，其中$g(z)\in\widetilde{D}$。我们的证明正是从对这个映射的讨论出发的。

考虑Δ内任意一点z。因D局部有限，故存在有限个象集

$$g_1(\widetilde{D}),\cdots,g_m(\widetilde{D})$$

其每一个都包含z点，使得它们的并覆盖z的一个开邻域N。

若$w\in N$，则对于某个$j, w\in g_j(\tilde{D})$，并且

$$\phi(w)=G^*(g_j)^{-1}=\phi(z)$$

这就推出每一点z都有一个开邻域N使得ϕ在N上为常值。

而具有这一性质的任何函数ϕ在Δ内必为常值(赋予$\phi(\Delta)$离散拓扑，因ϕ连续，$\phi(\Delta)$连通，故$\phi(\Delta)$只含一个点）。这表明对Δ内所有的z和w均有

$$\phi(z)=\phi(w)$$

任意给定G中的元素g，选取z和w使之分别属于D和$g^{-1}(D)$。因ϕ是常值而有

$$G^*=\phi(z)=\phi(w)=G^*g$$

故$g\in G^*$。这就证明了$G\subset G^*$。显然，有$G^*\subset G$，从而$G^*=G$，即G_0生成G。 □

下一个结果把局部有限性同不变区域联系起来；极限圆域和超圆域的定义见7.5节。

定理9.2.8 设D是Fuchs群G的任一局部有限基本域。

(i) 若g是G内的椭圆元素，K是满足$g(K)=K$的紧圆盘，则$\tilde{D}$必与且仅与K的有限个互不相同的象集相交。

(ii) 若g是G内的抛物元素，K是满足$g(K)=K$的极限圆域，则$\tilde{D}$必与且仅与K的有限个互不相同的象集相交。

(iii) 若g是G内的双曲元素，K是满足$g(K)=K$的超圆域，则$\tilde{D}$必与且仅与K的有限个互不相同的象集相交。

［证］ 对所有的情形，均在K内选取一点w。对于G中某个h有$h(w)\in\tilde{D}$，故$\tilde{D}$与K的某个象集相交。对于紧集K，(i)是平凡的，因为若$\tilde{D}$与$h(K)$相交，则$h^{-1}(\tilde{D})$与K相交，而这仅对h的一个有限集才可能出现。

为了便于证明（ii），设G是作用在H^2上并且$g(z)=z+1$。于是K必具有形式

$$K=\{x+iy: y>k\}$$

记

$$K_0=\{x+iy: y\geqslant k_0\}$$

$$K_1=\{x+iy: k\leqslant y\leqslant k_0\}$$

其中k_0的选取要使得

$$\bigcup_{f\in G} f(K_0)\neq H^2$$

最后的这个条件意味着K_0不可能包含$\widetilde{D}$的一个象集，从而若$f(\widetilde{D})$与K相交，则必定也与K_1相交。由Jorgenstn不等式知，K_0的这种选取是可能的，即若

$$f(z)=\frac{az+b}{cz+d}$$

属于G并且不以∞为不动点，则$|c|\geqslant 1$。于是

$$\mathrm{Im}[fz]\leqslant\frac{1}{y}$$

从而对于$k_0>1$，K_0不与$G(i)$相交。

设$\widetilde{D}$与$h(K)$相交，则$h^{-1}(\widetilde{D})$与K相交，从而也与K_1相交。若

$$E=\{x+iy: 0\leqslant x\leqslant 1,\ k\leqslant y\leqslant k_0\}$$

则

$$\bigcup_{n} g^n(E)=K_1$$

因此对于某个n，$g^n h^{-1}(\widetilde{D})$与$E$相交。由$E$是紧集，$D$局部有限可知，只有有限个$\widetilde{D}$的象集

$$g_1(\widetilde{D}),\cdots,g_s(\widetilde{D})$$

与E相交。于是对于某个j和n有$g^n h^{-1}=g_j$，从而$h(K)=g_j^{-1}(K)$。

(iii) 的证明类似。不妨设G是作用在H^2上并且$g(z)=kz$，$k>1$。超圆域必具有形式

$$K=\{re^{i\theta}: r>0,\ |\theta-\pi/2|<\varepsilon\}$$

记

$$E=\{z\in K: 1\leqslant |z|\leqslant k\}$$

因而$\bigcup g^n(E)=K$。只有$\widetilde{D}$的有限多个象集与紧集E相交，设这些象集为$g_1(\widetilde{D})$，…，$g_s(\widetilde{D})$。若$h(K)$与$\widetilde{D}$相交，则对于某个n有$g^n h^{-1}(\widetilde{D})$与$E$相交，因此对某个$j$有$h(k)=g_j^{-1}(K)$。 □

我们只提及定理9.2.8的一个推论。

推论9.2.9 若G是Fuchs群，D是G的任一局部有限基本域，ζ是G的某个抛物元素的不动点，则对于G中某个g，$g(\zeta)$属于D的欧氏闭包。

[证] 不妨设G是作用在H^2上，$\zeta=\infty$，并且ζ的稳定核由$p: z\mapsto z+1$生成。

再设K是在p映射作用下不变的极限圆域。在K中选取任一满足$\mathrm{Im}[z_n]\to+\infty$的点列$z_1, z_2, \cdots$。存在$G$中的元素$h_1$，$h_2$，…使$h_n(z_n)\in\widetilde{D}$，故$\widetilde{D}$与每个象集$h_n(K)$相交。定理9.2.8的应用（通过取子列并重新编号）表明

$$h_1(K)=h_2(K)=\cdots$$

于是存在整数$t_2, t_3, \cdots$使得$h_n=h_1 p^{t_n}$；从而$h_1(w_n)\in\widetilde{D}$，其中$w_n=p^{t_n}(z_n)$。由

$$\mathrm{Im}[w_n]=\mathrm{Im}(z_n)\to+\infty$$

知$w_n\to\infty$，故$h_1(\infty)$属于D的欧氏闭包。 □

习题 9.2

1. 修改定义9.2.3以适用于例9.2.1，并证明D不是局部有限的。

2. 构作一个作用于H^2上的Fuchs群G（$=\{g_1, g_2, \cdots\}$）以及G的一个局部有限基本域D，使得对每一个n，$g_n(D)$的欧氏直径为$+\infty$。

3. 设G是作用于Δ上的Fuchs群，以D为基本域。试证明：当且仅当条件（i）Δ/G是紧的和（ii）D是局部有限的均满足时，D关于双曲度量有界。

4. 设G是由$g: z\mapsto z+1$和$h: z\mapsto z+i$生成的群。不用C/G是紧空间的事实，试构造G的一个基本域D，使其在C内不是局部有限的。

5. 试证明：在例9.2.5中的凸基本域Σ的欧氏边界上包含有双曲不动点。并证明G中双曲元素g的一个不动点不可能位于任何局部有限的凸基本域的欧氏边界上。

§ 9.3 凸基本多边形

我们自然特别关注多边形基本域。非凸多边形很少用到，而另一方面，凸性尚不足以保证有令人满意的结果（见例9.2.5）。这些事实使我们着重于去讨论局部有限的凸基本多边形。值得注意的是，这类多边形实际上正是由凸性和局部有限性推出来的；因此，我们首先给出一个不涉及多边形结构的定义。

定义9.3.1 若G是Fuchs群，则当且仅当P是G的局部有限凸基本域时P是G的**凸基本多边形**。

需要特别指出的是，这只是词组“凸基本多边形”的一个定义，而并未预先规定P的边界具有何种特殊结构。我们要给这个干瘪的定义增添一些内容；所作的讨论将是初等的，但可以期望这样做对最佳的按照顺序推出各种结果是十分重要的。我们始终以P表示G的凸基本多边形。值得注意的是，P只是一般意义下的（而非通常所允许的）双曲多边形。比如，P的顶点可以在无穷远圆周上(可能有无限多个)，P的边界甚至可以包含无穷远圆周上的弧段。明确的说，将证明

$$P=\bigcap H_j$$

其中H_j是具有如下性质的可数个开半平面：双曲平面的任一紧子集包含于有限个H_j之中。

由于P局部有限，对于Δ内任一点z，存在以z为心的开双曲圆盘N及G内互不相同的元素g_1，g_2，…使得

$$z\in g_1(\widetilde{P})\cap\cdots\cap g_t(\widetilde{P})$$

$$N\subset g_1(\widetilde{P})\cup\cdots\cup g_t(\widetilde{P})$$

并且若$g(\widetilde{P})$与N相交，则对于某个j必有$g=g_j$。若$z\in\partial P$，则可设$g_1=I$，$t\geqslant 2$（否则$z\in N$，$N\subset P$）。这证明了

（1） 对于∂P中每一点z，存在G中某个$g\neq I$使$g(z)\in\partial P$。事实上，在凸性的条件下，（1）等价于局部有限性；参看定理9.2.6。

现在考虑G内任一元素g（$\neq I$）。显然，$\widetilde{P}\cap g(\widetilde{P})$是凸集且不包含不共线的三个点，否则就会包含一个非退化三角形，从而（由于∂P的面积为零）有$P\cap g(P)=\phi$。至此，我们推出了$\widetilde{P}\cap g(\widetilde{P})$既可能是一条测地线段，也可能是空集。现在我们可以来定义P的边和顶点。

定义9.3.2　P的边是形如$\widetilde{P}\cap g(\widetilde{P})$的具有正长度的测地线段。$P$的顶点是形如$\widetilde{P}\cap g(\widetilde{P})\cap h(\widetilde{P})$的单个点，其中$I,g,h$是互不相同的元素。

注：　P的边不必是通常意义下的边。若把∂P中最大的测地线段称为P的棱，则一条棱可以包含P的无限多条边。换句话说，我们允许P在顶点处的内角取值π。

然而G是可数集，并且只有$\widetilde{P}$的有限多个象集与Δ的紧子集相交。因此

(2) P只具有可数个边和顶点；

(3) 只有有限个边和顶点能同任何给定的Δ的紧子集相交。显然，P的边和顶点都位于∂P中，事实上，

(4) ∂P是P的边的并。

由边的这一定义可以看出，对于非局部有限区域，这个显而易见的命题却不再成立；参看例9.2.5。

为了证明 (4)，考虑∂P上任意一点w。由于以w为心的每个充分小的圆周都包含P中的点和不属于P的点，因而存在∂P中的点w_n趋于w。因w的紧邻域只与$\widetilde{P}$的有限多个象集相交，故存在某个g和无限多个n使得$w_n\in\widetilde{P}\cap g(\widetilde{P})$。这意味着$\widetilde{P}\cap g(\widetilde{P})$是包含$w$点的一条边。

从 (4) 推出P的每个顶点实际上位于P的一条边上。我们还有更强的结论，即

(5) 每个顶点恰好属于两条边，并且是这两条边的公共端点。

为了验证 (5)，设w是边$\widetilde{P}\cap g(\widetilde{P})=s$的一个内点。选取$P$内一点$z$，作三角形以$z$为顶点以$s$为对边；这是$P$内的

一个开三角形。作类似的构造可得出$g(P)$内一个以s为边的开三角形；这表明顶点不可能是一条边的内点，并且如果两条边相交则必交于一个顶点。

由（3）和（4）以及前面的注，每个顶点v位于数目为正的有限条边上，并且是这些边的公共端点。前面以简略叙述过的这种平凡的凸性论证表明这个数目不可能是1，也不会超过2。这就证明了(5)，并且也证明了

（6）任何两条边若相交则必交于一个顶点，并且该点是这两条边的公共端点。

顺便指出，（5）和（6）意味着三条边的交是空集。

基本多边形的另一有用性质是，若$G=\{I,g_1,g_2,\cdots\}$作用于Δ上，则

（7）当$n\to\infty$时，$g_n(D)$的欧氏直径趋于0。

如果结论不成立，则可找到$g_n(D)$中的点z_n和w_n使得

$$z_n\to z,\quad w_n\to w,\quad z\neq w,\quad |z| = |w| = 1$$

这将意味着$g_n(D)$凝聚于测地线〔z，w〕上，与D的局部有限性相矛盾。

现在我们要通过G的某些元素对P的边进行配对。设G^*是使$\widetilde{P}\cap g(\widetilde{P})$成为$P$的边的$G$中元素$g$的集合，$S$是$P$的边的集合。显然，$G^*$中每个$g$产生$S$中唯一的一条边$s$，即$s=\widetilde{P}\cap g(\widetilde{P})$，并且每条边都以这种方式出现。因此，存在一个满映射

$$\Phi:\ G^*\to S$$

它由式

$$\Phi(g) = \widetilde{P}\cap g(\widetilde{P})$$

给出。事实上，Φ是双射；因若$\Phi(g)=\Phi(h)$，则

$$\widetilde{P}\cap g(\widetilde{P})=\widetilde{P}\cap h(\widetilde{P})$$

而正如（6）所表明的那样，作为两条边这是不可能的，除非$g=h$。

Φ^{-1}：$S\to G^*$的存在性表明，每条边都伴随着G^*中唯一的一个元素g_s使得

$$S=\widetilde{P}\cap g_s(\widetilde{P})$$

于是

$$g_s^{-1}(s)=\widetilde{P}\cap g_s^{-1}(\widetilde{P})=s'$$

因具有正长度而也是一条边。顺便指出，若$s'=g_s^{-1}(s)$，则

$$g_{s'}=g_s^{-1}$$

事实上我们已构造了S到自身的一个映射$s\mapsto s'$，称之为P的**边偶对应**，这是因为

$$\begin{aligned}(s')'&=g_{s'}^{-1}(s')\\&=g_s(s')\\&=s\end{aligned}$$

用这样的方式便将P的边的集合S分成一些对子$\{s,s'\}$；我们并不排除$s=s'$的可能性。

下一个结果是定理9.2.7的加强，能够得到这一结果是因借助了P的多边形特性。

定理9.3.3 P的**边偶元素集**G^***生成**G。

［证］ 由定理9.2.7知，这只需证明若$\widetilde{P}\cap h(\widetilde{P})\neq\phi$，则$h$属于由$g_s$生成的群即可。考虑$\widetilde{P}\cap h(\widetilde{P})$内任意一点$w$。首先，存在以$w$为心的开圆盘$N$及$G$内元素$h_0(=I)$，$h_1,h_2,\cdots$，$h_t$使得对于某个$j\neq 0$有$h=h_j$，并且

$$w \in h_0(\widetilde{P}) \cap \cdots \cap h_t(\widetilde{P})$$

$$N \subset h_0(\widetilde{P}) \cup \cdots \cup h_t(\widetilde{P})$$

可以证明N不含任何$h_j(\widetilde{P})$的顶点（w除外），也不含$h_j(\widetilde{P})$的边（含w的那些边除外）；参看（3）。由（4）可知，位于N内的P的边界仅由一条边或两条从w点出发的边组成。同样的结论对每个其它的$h_j(\widetilde{P})$也成立，于是有如图9.3.1所示的情况之一（可通过重新编排$h_1, \cdots, h_t$的顺序）。

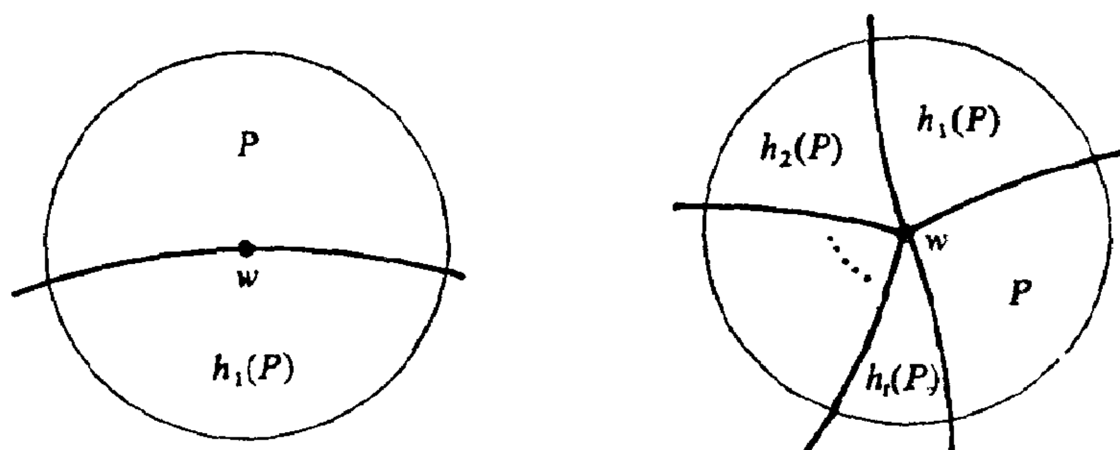


图 9.3.1

我们还可通过适当编序使下表

$$h_0(P) = P, \quad h_1(P), h_2(P), \cdots, h_t(P), P = h_0(P)$$

中的相邻两个多边形具有一条公共边。由此推出

$$\widetilde{P} \cap h_j^{-1} h_{j+1}(\widetilde{P})$$

是具有正长度的测地线段，因而是一条边。于是对某个边偶元素g_s有

$$h_{j+1} = h_j g_s$$

从而知h属于由g_s生成的群。 □

现在我们要来详细检查用$\widetilde{P}$的象集镶拼Δ内任一点的邻

域的方式。显然，我们只需注意∂P中的点，关于这些点的情况在前面的证明中已作过完全的描述。现在把这些结果加以综合。

取定∂P内任意一点w，对于某个h有$w\in\widetilde{P}\cap h(\widetilde{P})$。如定理9.3.3所证明的那样，存在$h_1,\cdots,h_t$，若$g(w)\in\partial P$，则$w\in g^{-1}(\widetilde{P})$，从而对于某个$j$有$h=h_j$。我们可以引入某些术语。

定义9.3.4 (i) $\widetilde{P}$中的一个**循环**C是$\widetilde{P}$同一条G-轨道的交；这个交必是一个有限集$\{z_1,\cdots,z_n\}$，C的**长度**$|C|$是n。

(ii) 若C是一个循环，设为$\{z_1,\cdots,z_n\}$。则z_j的稳定核G_j互相共轭，且为G的有限循环子群。循环C的**阶**定义为诸G_j的公共阶，并记为Ord(C)。

(iii) 设C是(ii)中的循环，P在z_j点的角为θ_j。循环C的**角度之和**$\theta(C)$定义为$\theta_1+\cdots+\theta_n$。

下一个结果具有基本的重要性。

定理9.3.5 对于每个Fuchs群G，凸基本多边形P和循环C，有

$$\theta(C)=2\pi/\mathrm{Ord}(C)$$

〔证〕 无疑，用陪集来证明是最有效的。设$C=\{z_1,\cdots,z_n\}$，故对于某些元素$g_1(=I)$，$g_2,\cdots,g_n$有$g_j(z_j)=z_1$。这推出$g_j(P)$以z_1为顶点，且在z_1点的角为θ_j。

其次，当且仅当$h^{-1}(z_1)$是某个z_j时$z_1\in h(\widetilde{P})$，而此事又当且仅当对于某个j，$h(g_j)^{-1}$以z_1为不动点时成立。设G_1是z_1的稳定核；于是，当且仅当对某个j有$h\in G_1g_j$时$z_1\in h(\widetilde{P})$。参看图9.3.1，知有

$$\{h_0,h_1,\cdots,h_t\}=G_1g_1\cup\cdots\cup G_1g_n \qquad (h_0=I)$$

且恰好只有在这些元素的映射下$\widetilde{P}$的象集才包含点z_1。因G_1中的元素都是关于z_1点的旋转，故$G_1 g_j$中每个元素f使$f(\widetilde{P})$在点z_1的角为θ_j；因此有

$$
\begin{aligned}
2\pi &= [\mathrm{Ord}(G_1)](\theta_1 + \cdots + \theta_k) \\
&= [\mathrm{Ord}(C)]\theta(C)
\end{aligned}
$$
□

让我们再来仔细考察定理9.3.5的一些推论。首先设z不是G中任何椭圆元素的不动点；我们称包含z点的（$\widetilde{P}$中）循环C为偶然循环。这些循环以$\mathrm{Ord}(C)=1$为特征，故有

$$\theta(C) = \theta_1 + \cdots + \theta_n = 2\pi, \qquad (n = |C|)$$

若$n=1$，则$\theta_1 = 2\pi$，$z \in P$。若$n=2$，则$\theta_1 = \theta_2 = \pi$（因为由定理7.16.1可知，每个$\theta_j$均满足$0 \leqslant \theta_j \leqslant \pi$），并且$z$是一条边的内点。逆命题也成立，因此若$z$是一个偶然顶点（偶然循环$C$中的顶点），则$|C| \geqslant 3$。

其次，设z是G内一个椭圆元素的不动点，z的稳定核的阶数是q；则$\mathrm{Ord}(C)=q$。于是有

$$\theta(C) = \theta_1 + \cdots + \theta_n = 2\pi/q$$

最有趣的特例是$|C|=1$的情形（z不与∂P上任何别的点等价）；此时有$\theta_1 = 2\pi/q$。若$|C|=1$，$q=2$，则

$$\theta(C) = \theta_1 = \pi$$

容易看出，在这种情形下，z的稳定核为$\{I, g\}$，$g^2 = I$，并且z是边

$$s = \overline{P} \cap g(\overline{P})$$

的内点。顺便指出，在这种情形下，由于$g = g^{-1}$而有

$$s' = g^{-1}(s) = s$$

反之，若$s = s'$，则容易看出g_s是二阶元素，并且其不动点在

s上（考虑g_s在包含s的测地线上的作用，并注意到$P \cap g_s(P) = \phi$）。

由于G的椭圆不动点需特别加以注意，因而把所有的椭圆不动点均视为顶点常常会带来方便。与先前定义不同的只是涉及到了二阶椭圆不动点。我们所采用的是惯用的定义，这方面的问题通过说明二阶椭圆不动点是否作为P的顶点就可完全解决，或者（与之等价地）通过说明是否规定$s \neq s'$而得到解决。一个平凡的例子将澄清这一点。

例9.3.6 设$g(z) = -z$，$G = \{I, g\}$。可取P为Δ的上半部分，并且按照两种习惯或者

（1）P只有一条边，即$(-1,1)$，没有顶点；或者

（2）P有两条边，即$(-1,0)$，$(0,1)$，并且有一个顶点，即$\{0\}$。 □

现在来讨论P在$\{|z| = 1\}$上的欧氏边界；用E表示这一集合。E可以有不可数个分支，但只有可数个分支具有正（欧氏）长度；我们称这些分支为P的**自由边**，它们是$\{|z| = 1\}$上的非退化闭区间。

顺便指出，若$w \in E$，则存在P中的z_n收敛于w。对于P中任意一点z，线段$[z, z_n]$包含于P中，并且显然有$[z, w) \subset \tilde{P}$。对所有充分接近于z的点有同样的结论，且因P是凸集而推出$[z, w) \subset P$。

E的点w不必属于P的任何一条边或任何一条自由边；例如，可以有无限多条边凝聚于w点，但却又都不含该点。对这种情况我们不能作更多的介绍，我们只限于讨论两条边的端点。

定义9.3.7 E中一点v被称为P（在无穷远）的一个**固**

有顶点，如果v是P的两条边的端点；称v为非固有顶点，如果v是P的一条边和一条自由边的交点。通称这两种情况下的v为P的一个无穷远顶点。

这些顶点如图9.3.2所示。

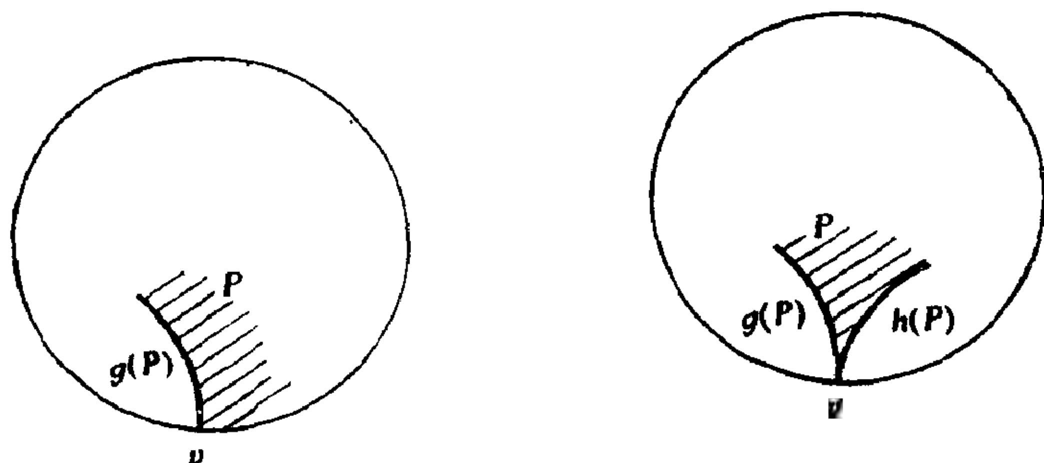


图 9.3.2

对E中每一点z，z的循环可如前定义为$G(z)\cap E$。如果z是常点，那么z的循环必定是有限集（否则就有无限多个P的象集同z的任何邻域相交，而由(7)知，z应是一个极限点）。这个z点也必定是在无穷远处的固有或非固有顶点。定义 9.3.4 显然可以推广到这种情况，并且若C是z的循环，则有

$$\mathrm{Ord}(C)=1,\quad \theta_1+\cdots+\theta_n=\pi$$

这是定理9.3.5的翻版，相当于当z是自由边的内点且$|C|=1$，$\theta_1=\pi$时的结论。另一方面，注意到θ_j只能取0或$\pi/2$，因此若$|C|=2$，则必有$\theta_1=\theta_2=\pi/2$。于是，z是P的一条自由边和某个$g(P)$的一条自由边的公共端点。下一节我们将再来讨论这种情形。

只有一种另外的情况可以作出有益的讨论。

定理9.3.8 若v是E上的一点并且是G的某个非平凡元素的不动点，则必是G的某个抛物元素的不动点（而不是G的任何双曲元素的不动点）。E上点v的循环C是有限循环，它的每一点均是P的固有顶点。

〔证〕 首先，因$|v|=1$，v不可能是G中椭圆元素的不动点。若v是G中双曲元素h的不动点，则设A是h的轴，并任作一射线(z,v)包含于P。在(z,v)上取z_n使得$z_n\to v$。于是，存在A上的点a_n使得

$$\rho(z_n,a_n)\to 0$$

对每个n，均存在h的某个幂设为h_n，使得$h_n(a_n)$位于A的一个紧子弧上。因此，点$h_n(z_n)$属于Δ的一个紧子集K；由于h_n是互不相同的，这就同P局部有限的事实相矛盾。我们推出v不可能是双曲元素的不动点；因此以v为不动点的元素必定是抛物元素。

显然，由v确定的E上的点的循环只包含抛物不动点。如果这个循环是无限集，设为$v,v_1,v_2,\cdots$，则存在互不相同的元素g_n使$g_n(v)=v_n$。若K是基于v点的任一极限圆域，则$g_n(K)$是基于v_n点的极限圆域，且必与凸集P相交（因为$v\in E$）。这就推出P同K的无限多个象集相交，而同推论9.2.9相违；于是，由v确定（或由任何抛物不动点确定）的循环是有限集。

最后，还需证明v是P的固有顶点；而v的循环中的所有点也必定如此（证明方法相同）。

选取点v的任一极限圆域K。由推论9.2.9可知，$\widetilde{P}$只与K的有限个象集相交，设这些象集是

$$K,g_1(K),\cdots,\ g_t(K)$$

且分别是基于$v, v_1, \cdots, v_t$的极限圆域（$v_j = g_j(v)$）。若$v_j \notin E$，则$\tilde{P}$同v_j的某个欧氏邻域不相交，因而$\tilde{P} \cap g_j(\tilde{K})$是$\Delta$的一个紧子集。因必要时可减小$K$，故不妨设对于每个$j$，点$v_j$属于$g_j(\tilde{K})$。这表明$v$的循环是$\{v, v_1, \cdots, v_t\}$。

不失一般性，设G作用在H^2上，$v = \infty$，并且∞的稳定核由p：$z \mapsto z+1$生成。当然，这时的K具有形式$\{x + iy;\ y > k\}$；不妨设$k > 1$。若

$$a = \inf\{\text{Re}[z]: z \in P\},\ b = \sup\{\text{Re}[z]: z \in P\}$$

则$a \leqslant b \leqslant a+1$（否则$b - a > 1$，而由凸性，$P$包含一个宽大于1的三角形，从而$P \cap p(P) \neq \phi$）。因当且仅当$h^{-1}(K)$为$K$或某个$g_j(K)$时$K$与$h(\tilde{P})$相交，而此事当且仅当对于某个$j$和$n$有

$$h^{-1} = g_j p^n \qquad (g_0 = I)$$

时才成立，故可推出∞位于$h(P)$的边界上（因$h(v^j) = \infty$）。正如上述，$h(P)$位于宽度为1的一个竖直带域内，因此至多存在n的三个相邻的值使$P^{-n} g_j^{-1}(\tilde{P})$ （$= h(\tilde{P})$）与$\tilde{P}$相交。于是，只有$\tilde{P}$的有限多个象集同$\tilde{P} \cap K$相交。这意味着$\tilde{P} \cap K$只同P的有限条边相交，因此在∞点处的一个充分小的极限圆内，P的边界仅由两条竖直测地线组成。 □

注：最后我们对G的椭圆和抛物共轭类作一点注解。设g是G内任一抛物元素，假定其不动点为v。推论9.2.9表明对于G中某个h，点$h(v)$属于E，且当然是g的共轭元素hgh^{-1}的不动点。由定理9.3.8知，存在P的两条边以$h(v)$为端点。我们断定，G的每个抛物元素均共轭于某个以P的固有顶点为不动点的抛物元素；从这个意义上来说，基本多边形P包含着抛物元素的所有共轭子类的种种表示。对于椭圆元

素也如此．证明是平凡的，在此从略。

习题 9.3

1．设

$$D=\{z\in\Delta:\rho(z,0)<r\}$$

A_1，…，A_n是D的两两互不相交的开凸子集，满足

(i) $\tilde{D}=\tilde{A}_1\cup\cdots\cup\tilde{A}_n$

(ii) $0\in\tilde{A}_1\cap\cdots\cap\tilde{A}_n$

试证明：适当选取θ_j（$\theta_1=\theta_{n+1}$）可使得

$$A_j=\{z\in D:\theta_j<\arg z<\theta_{j+1}\}$$

2．设s_1，s_{-1}，s_2，s_{-2}…是$\{|z|=1\}$上两两不交的闭子弧。为了方便，设每个s_j在原点所对的角均小于π。再设L_j是与S_j有相同端点的测地线；于是$\Delta-L_j$是两个半平面H_j(含原点)和H'_j（边界为$L_j\cup s_j$）的并。

设g_1，g_2，…是Δ的共形等距映射，且满足

$$g_j(L_j)=L_{-j},\quad g_j(H_j)=H'_{-j}$$

定义

$$G=\langle g_1,g_2,\cdots\rangle,\qquad D=\bigcap_j H_j$$

试证明

(i) 每个g_j都是双曲元素；

(ii) 若$g\in G$，$g\neq I$，则$g(D)\cap D=\phi$。

现在假设存在正数δ，使得对所有的j有

$$\{z\in H_j:\rho(z,L_j)<\delta\}\subset D$$

试证明

$$\{z\in\Delta:\rho(z,\tilde{D})<\delta\}\subset\bigcap_{g\in G}g(D)$$

及

$$\bigcup_{g\in G}g(\tilde{D})=\Delta$$

（故D是G的凸基本域）。再证明D局部有限。

3．试利用题2证明：若D是一个$Fuchs$群的凸基本多边形，则D的欧氏闭包在$\{|z|=1\}$上有不可数个分支(用类似于构造$Cantor$集的方法处理S_j）。

4．用题2的记号，设s_1和s_{-1}分别由$|\arg z-\pi|\leq\pi/4$和$|\arg z|\leq\pi/4$给定。通过构造S_j，S_{-j}凝聚于S_1的端点但不凝聚于S_{-1}，证明G的凸基本多边形的非固有顶点可以是G的一个极限点。

§9.4 Dirichlet 多边形

本节描述凸基本多边形的一种特殊构成，这也就建立了任何$Fuchs$群的这类多边形的存在性。设G是作用在Δ上的$Fuchs$群，w是Δ内的任意一点但不是G的任何椭圆元素的不动点。对于G中每个元素g（$g\neq I$）定义

$$L_g(w)=\{z\in\Delta:\rho(z,w)=\rho(z,gw)\}$$

$$H_g(w)=\{z\in\Delta:\rho(z,w)<\rho(z,gw)\}$$

$$=\{z\in\Delta:\rho(z,w)<\rho(g^{-1}z,w)\}$$

顺便指出，$L_g(w)$是一条测地线（不含w），$H_g(w)$是由$L_g(w)$界成的包含w的半平面。事实上，$L_g(w)$是$H_g(w)$与$H_{g^{-1}}(gw)$的公共边界(参看图9.4.1）。

定义9.4.1 定义G的以w为**中心**的$Dirichlet$**多边形**$D(w)$为

$$D(w)=\bigcap_{g\in G,\,g\neq I}H_g(w)$$

有时称$D(w)$为G的$Poincaré$多边形(或正规多边形)。$Dirichlet$在1850年把这种构造应用于欧氏空间，后来$Poin$-

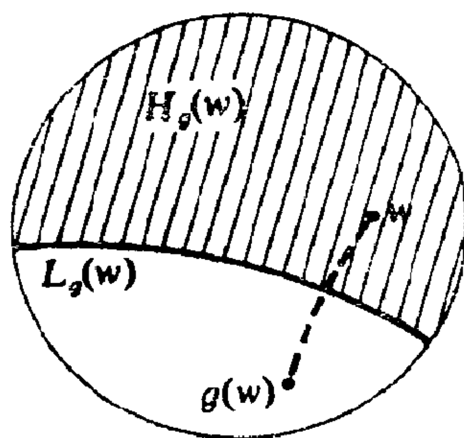


图 9.4.1

caré把它应用到了双曲空间。

考虑到H_g的两种表示，$D(w)$ 既可 说成是与w较近而与w的其它象点较远的点z的集合，也可以说成是具有如下性质的点z的集合，即在所有的象点中它是最接近于w的点。注意到$z\in H_g(w)$ 当且仅当$w\in H_{g^{-1}}(z)$，因此有一个对称的表示式，即

$z\in D(w)$ 当且仅当 $w\in D(z)$

若h是双曲平面的一个等距映射，则

$$h(H_g(w)) = H_{hgh^{-1}}(hw)$$

因而（用$D_G(w)$ 表示$D(w)$）有

$$h(D_G(w)) = D_{hGh^{-1}}(hw)$$

特别的，若$h\in G$，则

$$h(D(w)) = D(hw)$$

定理9.4.2 *Dirichlet* 多边形$D(w)$ 是G的凸基本多边形。

［证］ 因为每个$H_g(w)$ 均是包含w点的凸集，故$D(w)$ 是非空凸集。

剩下的问题是证明一个最要紧的事实：只有有限多条 $L_g(w)$ 能与 Δ 的任一给定紧集相交；而这又是如下事实的直接推论，即若 $G=\{g_0, g_1, \cdots\}$，则当 $n\to+\infty$ 时，有

$$\rho(w, L_{g_n}(w))=\frac{1}{2}\rho(w, g_n w)\to+\infty$$

在 $D(w)$ 的闭包上任意取定一点 z，存在以 z 为中心的紧圆盘 K 使得对所有的 g，或者 $K\subset H_g(w)$，或者 $z\in L_g(w)$；并且后一种情况只对有限个元素 g 可能发生。当然，若 $z\in D(w)$，第二种可能性也就决不会出现，从而有 $K\subset D(w)$；这证明了 $D(w)$ 是开集。进而可知 $D(w)$ 的边界包含于 $L_g(w)$ 的并集之中，因此

$$\text{h-area}(\partial D(w))=0$$

其次，要证明存在一个基本集 F 满足

$$D(w)\subset F\subset\widetilde{D}(w)$$

在每条轨道 $G(z)$ 中只选取一个点 z^* 使得对 G 中所有的元素 g 满足

$$\rho(w, z^*)\leqslant\rho(w, gz)$$

这种选取是可行的，因为 w 不是 $G(z)$ 的聚点。所选取的点的集合 F 显然包含 $D(w)$，因为当 $z\in D(w)$ 时，我们除了取 $z^*=z$ 之外别无其它选择。

为了证明 $F\subset\widetilde{D}(w)$，我们在 F 中任取一点 z 并考虑线段 $[w, z)$。因 $w\in D(w)$，故没有 $L_g(w)$ 经过 w 点。若 $L_g(w)$ 与线段 (w, z) 相交，则

$$\rho(z, w)>\rho(z, gw)=\rho(g^{-1}z, w)$$

而这与 $z\in F$ 的事实相矛盾。因此没有 $L_g(w)$ 与 (w, z) 相交，故 $(w, z)\subset D(w)$。这推出 $z\in\widetilde{D}(w)$，从而有

$F\subset\tilde{D}(w)$ 。

我们已经证明了$D(w)$是G的一个凸基本域，还要证明$D(w)$是局部有限的。设K是以w为中心以r为半径的紧圆盘，并假定$g(\tilde{D}(w))$与K相交；于是存在$\tilde{D}(w)$中某点z满足$\rho(gz,w)\leqslant r$。因$z\in\tilde{D}(w)$，故有

$$
\begin{aligned}
\rho(w,gw)&\leqslant\rho(w,gz)+\rho(gz,gw)\\
&\leqslant r+\rho(z,w)\\
&\leqslant r+\rho(gz,w)\\
&\leqslant 2r
\end{aligned}
$$

而这仅仅对有限个元素g才可能成立。 □

鉴于定理9.4.2，在9.1节、9.2节和9.3节中的所有结果对Dirichlet多边形仍然有效。例如，只要w不是G的椭圆不动点，商空间

$$\tilde{D}(w)/G$$

（就拓扑而言）就与w的选取无关；这种例外情况将在9.6节中加以讨论。

关于这种特殊的基本多边形$D(w)$的边界结构，我们能够说得稍许多一些。比如，我们有如下初等而重要的结果。

定理9.4.3 若$\{z_1,\cdots,z_n\}$是Dirichlet多边形$D(w)$的边界上的任意一个循环，则

$$\rho(z_1,w)=\rho(z_2,w)=\cdots=\rho(z_n,w)$$

［证］ 考虑在$D(w)$的边界上满足$z_2=h(z_1)$的两点z_1和z_2。由$[w,z_1)\subset D(w)$而有

$$
\begin{aligned}
[hw,z_2)&=h[w,z_1)\\
&\subset h(D(w))
\end{aligned}
$$

$$= D(hw)$$

这推出z_2与w和hw两点的距离相等，于是有

$$\rho(w, z_2) = \rho(hw, z_2)$$
$$= \rho(w, h^{-1}z_2)$$
$$= \rho(w, z_1) \qquad \square$$

$D(w)$的每条边具有形式

$$s = \widetilde{D}(w) \cap g(\widetilde{D}(w))$$
$$= \widetilde{D}(w) \cap \widetilde{D}(gw)$$

而由我们前面的描述知，这必包含于$L_g(w)$。因此，$D(w)$的边都是平分线$L_g(w)$上的线段。由似的理由推出，顶点是$D(w)$的边界点且有两条或两条以上的$L_g(w)$在该点相交。

通过讨论一个特殊的例子，我们来图解这样的一些思想。

例9.4.4 设G是作用在H^2上的模群。我们要证明如图9.4.2所示的开多边形P是以$\mathrm{i}v$为中心的*Dirichlet*多边形，$v>1$是任意的一个实数。命$w=\mathrm{i}v$，$v>1$，并且为了简便起见把$D(w)$记为D，类似地有记号L_g和H_g。

首先，等距映射

$$f(z) = z+1 \quad , \quad g(z) = -\frac{1}{z}$$

属于G，并且（如读者所容易验证的）P的三条测地边是L_f，$L_{f^{-1}}$，L_g。这表明$D\subset P$。

若$D\neq P$，则D的某条边与P相交；因此存在D中某点z满足$h(z)\in h(D)\cap P$。这就推出z与$h(z)$属于P，我们的目的是要证明这种情况不可能发生。假定

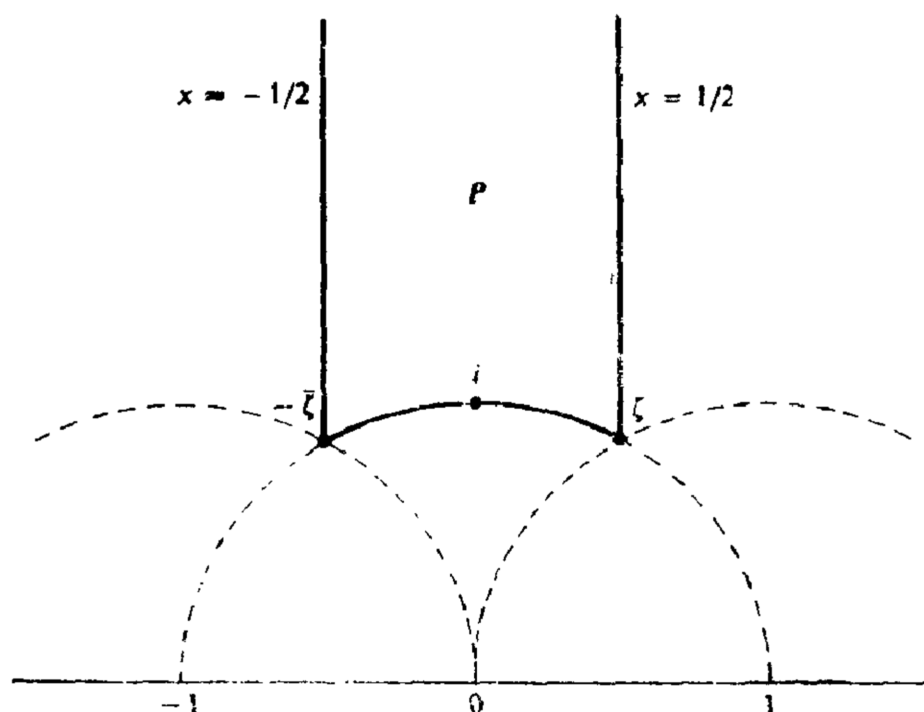


图 9.4.2

$$h(z)=\frac{az+b}{cz+d},\qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in SL(2,\ Z)$$

由 $|z|>1$, $|\mathrm{Re}[z]|<1/2$ 而有

$$\begin{aligned}|cz+d|^2&=c^2|z|^2+2\mathrm{Re}[z]cd+d^2\\&>c^2+d^2-|cd|\\&=(|c|-|d|)^2+|cd|\end{aligned}$$

这个下界是整数；它是非负的，并且仅当$c=d=0$时才是零但$ad-bc=1$，故不可能为零。这就推出$|cz+d|>1$（注意：这是严格不等式），从而

$$\mathrm{Im}[hz]=\frac{\mathrm{Im}[z]}{|cz+d|^2}<\mathrm{Im}[z]$$

在式中将z，h代之以hz，h^{-1}结论仍成立，而这就导致矛盾；因此$D=P$。 □

因D是凸基本多边形，故可应用9.3节中的内容。我们可以把D看成具有三条边，即

$$s_1=[\xi,\infty),\quad s_2=[-\bar{\xi},\infty),\quad s_3=[-\bar{\xi},\xi]$$

及边偶$f(s_2)=s_1$，$g(s_3)=s_3$。我们也可以采取不同的约定即考虑二阶椭圆元素的不动点；如果采取这种约定，s_3就要代之以两条边

$$s_4=[-\bar{\xi},\mathrm{i}],\quad s_5=[\mathrm{i},\xi]$$

且有$g(s_4)=s_5$，$g(s_5)=s_4$，而且还要把i当作D的一个顶点。

因P是G的基本多边形，故由图9.4.3所示的多边形P_1（只是将P的一条竖直带用它在f作用下的象代替）也是基本多边形。顺便指出，在这种情形下，P_1（按照我们的约定）有五条或六条边（但决不会是四条边）；在六条边的情形下，这些边是

$$s_1=[-\bar{w},\infty),\quad s_2=f(s_1)=[1-\bar{w},\infty)$$
$$s_3=[-\bar{w},\mathrm{i}],\quad s_4=g(s_3)=[\mathrm{i},w]$$
$$s_5=[w,\xi],\quad s_6=fg(s_5)=[\xi,1-\bar{w}]$$

P_1的顶点的循环是集合

$$\{\infty\},\ \{\mathrm{i}\},\ \{\xi\},\ \{-\bar{w},w,1-\bar{w}\}$$

注意到最后一个循环是偶然循环，并且P_1在顶点w处的角度为π（不管是否采用以二阶椭圆元的不动点作为顶点的约定）。

回到一般的情况，我们猜测$D(w)$的某些性质将依赖于w的选取，对此必存在w的某种最优选择。本节的最后一个结果将描述一些这样的最优选择。

定理9.4.5 若G是Fuchs群，$D(w)$是以w为中心的Dirichlet多边形，则对w的几乎一切的选择均有

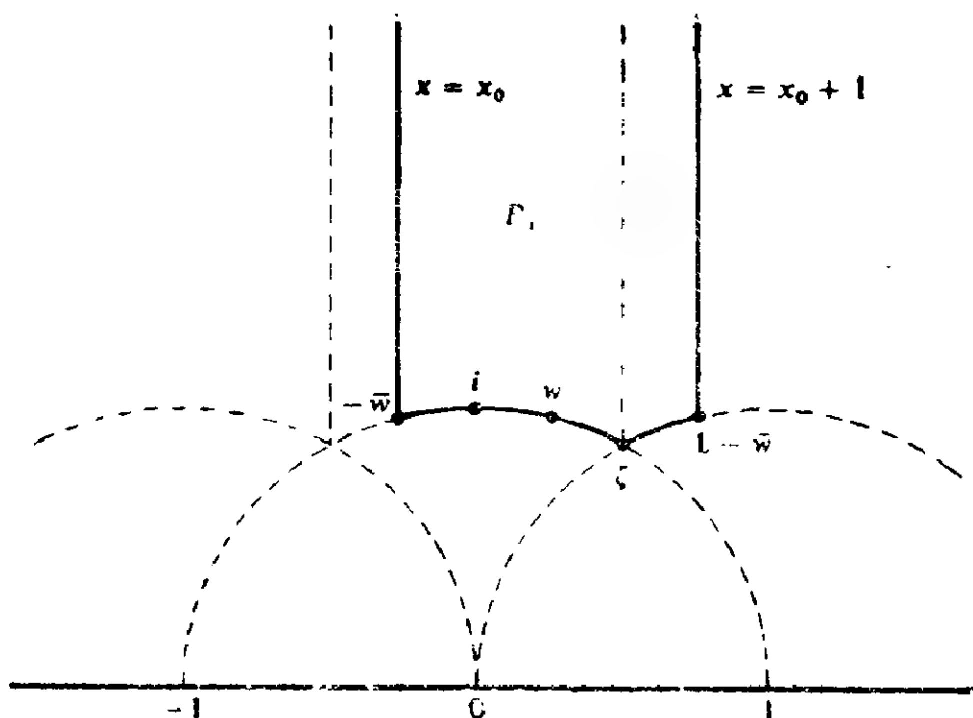


图 9.4.3

(1) $\partial D(w)$ 上的每一个椭圆循环长度为1；

(2) $\partial D(w)$ 上的每一个偶然循环长度为3；

(3) 每个非固有顶点作为常点属于一个长度为2的循环；

(4) 每个固有顶点的循环长度为1，并且是抛物不动点；

(5) 每个抛物循环长度为1，并且是固有顶点。

［证］ 每一部分的证明遵从同一模式：若条件（k）不成立，则w必属于某个面积为零的例外集E_k。如果w不属于面积为零的集合$\bigcup E_k$，那么所有五个条件均满足。我们记$D(w)$为D。

条件（1）容易检验。设E_1是与两个不同的椭圆不动点等距的测地线的并集。显然，E_1的面积为零。若u, v是同一循环中的两个椭圆不动点，则$\rho(u, w) = \rho(v, w)$（定理

9.4.3），因而$w\in E_1$。

余下部分的证明需要用到如下的简单引理。

引理9.4.6 若$R(z)$是z的任何一个非常数的有理函数，则

$$E=\{z: R(z)\text{是实数}\}$$

的面积为零。

［证］ 在扩充平面上除有限集$\{z_1,\cdots,z_n\}$之外的每一点处，函数R是满足某个$Lipschitz$条件的局部同胚。因此，每一点z（$\neq z_j$）均有一个邻域N使得$E\cap N$的面积为零，而可数个这种N覆盖了删去$z_1,\cdots,z_n$的平面。 □

回到定理9.4.5的证明。对于G中互不相同且均不为I的三个元素f，g，h，定义

$$R(z)=\frac{(z-gz)(fz-hz)}{(z-fz)(gz-hz)}$$

（为了简便起见，我们就不去明显提及R对f，g，h的依赖了）。顺便指出，R可以是常数（比如当f，g，h都以0和∞为不动点时）。命

$$E_2=\bigcup\{z: R(z)\text{ 是实数}\}$$

这是就所有使R不为常数的三元素组（f，g，h）作的并。由引理9.4.6知，E_2的面积为零；而我们将要证明：若条件（2）不成立，则$w\in E_2$。

设条件（2）不成立，即在∂D上的某个偶然循环中有四个互不相同的点u，$f^{-1}u, g^{-1}u, h^{-1}u$。定理9.4.3意味着

$$\rho(w,u)=\rho(fw,u)=\rho(gw,u)=\rho(hw,u)$$

即不同的四点w，fw，gw，hw位于以u为中心的一个双

曲圆周上。因而它们的交比$R(w)$是实数，故$w\in E_2$，除非R是常数。

我们来证明R不可能是常数。如果R是常数λ，那么可通过选取一点z使其不是$g, f, f^{-1}h$和$g^{-1}h$的不动点而知$\lambda \neq 0$, ∞。再让z趋于g的不动点v，则R的分子趋于零，因此分母也必须趋于零，即f或h也以v为不动点。设g和f有一个公共不动点（同样的论证对h也有效）。由g和f属于$Fuchs$群G，知$\langle g, f\rangle$是由某个元素P生成的循环群。显然，P是根据关于$\langle g, f\rangle$的任何一点的轨道到底是在超圆上、还是在极限圆上或双曲圆上而分别为双曲、抛物或椭圆元素的（这些可能性是互相排斥的）。而由假设，P是椭圆元素，并且以过w, gw fw三点的唯一的双曲圆的中心为不动点。这就推出$fu = gu = u$，此结论与u属于一个偶然循环相矛盾。这就证明了（2）。

对（3），（4）和（5）可进行类似的论证。先设v是D的固有顶点，则存在以v为端点的两条边

$$s_1 = \widetilde{D} \cap g(\widetilde{D}), \qquad s_2 = \widetilde{D} \cap h(\widetilde{D})$$

因s_1是平分线段$[w, gw]$的测地线（s_2类似），从7.28节推出v, w, gw, hw位于以v为基点的极限圆上。

考虑函数

$$R_1(z) = [v, z, gz, hz] = \frac{(v-gz)(z-hz)}{(v-z)(gz-hz)}$$

因极限圆是欧氏圆周，故$R_1(w)$是实数。这推出若R_1不是常数则w属于一个相应的面积为零的例外集。我们须证明当R_1是常数时（3），（4），（5）也成立。

设R_1是常数λ，如前所证有$\lambda \neq 0$, ∞。命z趋于v知g或

h以v为不动点；由对称性知，可$gv=v$。于是，由定理9.3.8推出，g是抛物元素，这意味着D的边g^{-1}（s_1）也以v为端点，因而就是s_2。这意味着$h=g^{-1}$且v是长度为1的循环中的抛物不动点，从而推出（4）和（5）成立，因为∂D上的每个抛物不动点都是固有顶点（定理9.3.8）。

最后，任何非固有顶点v作为常点属于同一个有限循环$\{v_1,\cdots,v_n\}$（$v=v_1$），且D在这些点处的角度为θ_1，…，θ_n，其中每个θ_j为0或$\pi/2$，$\sum\theta_j=\pi$。利用（4），知θ_j不可能是零；于是$n=2$，而这就是(3)。 □

习题 9.4

1．试将Dirichlet多边形（或更严格地称为多面体）理论推广到作用于H^3上的$SL(2,\mathbf{C})$的离散子群。

§9.5 广义 Dirichlet 多边形

设G是任一Möbius变换群，它在扩充复平面的某个G-不变开子集Σ上为不连续群。假定$\infty\in\Sigma$且设∞不是G中任何非平凡元素的不动点。这些假设条件保证了G中每个非平凡元素g具有一个等距圆周I_g。若以H_g表示I_g的外部，则可证明

$$F_G=\bigcap_{g\in G,\,g\neq I}H_g$$

本质上是G的一个基本域（它不必连通；必要时可移动F_G的某些边界点），称之为Ford基本域。它在本质上显然是欧氏的而不是双曲的。

考虑作用于Δ上的Fuchs群G，假定∞不是G中任何非平

凡元素的不动点（因而原点也如此）。由此可构造出 F_G 和以0为中心的Dirichlet多边形$D_G(0)$，且将会看到

$$\Delta \cap F_G = D_G(0) \tag{9.5.1}$$

值得注意的是，这个等式把一个本质上是欧氏的并且不是共轭不变的集合同另一个本质上具有双曲特征并且是共轭不变的集合等同起来。这一事实可以用扩充复平面的反演几何学来解释，按照这种几何学，两个显然不同的结构可以表现为我们即将描述的同一个结构的两种不同的情况。

设P是双曲平面的任意一种模型（即Δ或H^2），它是扩充复平面的一个开圆盘。设∂P是无穷远圆周。在扩充复平面中取定任何一点ζ。P的任何一个共形等距映射g可表示成

$$g = \sigma_2\sigma_1$$

其中σ_j：$P \to P$表示关于测地线L_j的反射。将每条L_j扩充为一个圆周且使圆周L_2包含ζ点。只要g不以ζ为不动点（这可作为假设条件），σ_1，σ_2，L_1，L_2便唯一确定,今后将这种特殊的选取分别表示为

$$\sigma_g, \sigma_g^*, L_g, L_g^*$$

由定义知，$\zeta \in L_g^*$，因而$\zeta \notin L_g$，因为否则σ_g和σ_g^*（从而g）均以ζ为不动点。于是存在唯一的双曲半平面H_g以L_g为边界并包含ζ点。设K_g是以L_g为边界的另一个半平面；参看图9.5.1，这是就一个抛物元素g所作的图解。

定义9.5.1 设G是作用在P上的Fuchs群，假定ζ（扩充复平面中的点）不是G的任何非平凡元素的不动点。则称

$$\Pi_G(\zeta) = \bigcap_{g \in G,\, g \neq I} H_g$$

为以ζ为中心的广义Dirichlet多边形。

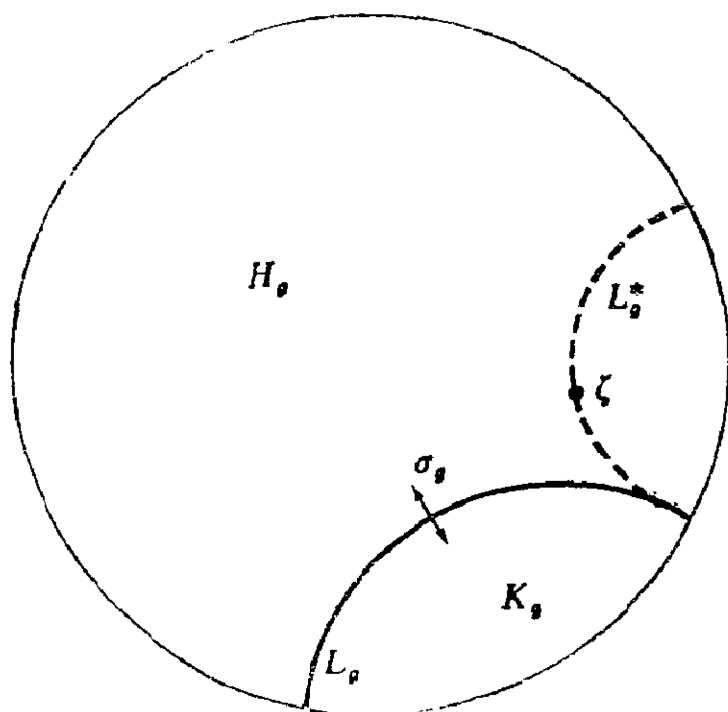


图 9.5.1

若以τ表示关于∂P的反射，则当且仅当$L_g{}^*$包含点$\tau(\zeta)$时它包含ζ点（因为$L_g{}^*$与∂P正交）；因此有如下的不变性条件

$$\Pi_G(\zeta) = \Pi_G(\tau\zeta) \qquad (9.5.2)$$

特别的，若$P = \Delta$，则

$$\Pi_G(\infty) = \Pi_G(0) \qquad (9.5.3)$$

定理9.5.2　在定义9.5.1中若补充假定ζ是G的一个常点，则$\Pi_G(\zeta)$是G在P中的基本域。

若$\zeta\in P$，则$\Pi_G(\zeta)$是Dirichlet多边形$D_G(\zeta)$。若$\zeta = \infty$，则$\Pi_G(\zeta)$是G的所有元素的等距圆周外部的区域。最后，对于所有的h有

$$h(\Pi_G(\zeta)) = \Pi_{hGh^{-1}}(h\zeta) \qquad (9.5.4)$$

注：对于双曲平面我们有意采用记号P而不是Δ或H^2，这是为了便于处理∞点。比如当$P = H^2$时$\infty\in\partial P$，而当$P = \Delta$时

却并不如此。

〔证〕　若以σ表示关于圆周L的反射，则$h\sigma h^{-1}$是关于$h(L)$的反射。这一事实直接推出（9.5.4）式，并且有助于简化余下部分的证明。

在$\zeta\in P$的情形中，可应用（9.5.4）式而假定$P=\Delta$，$\zeta=0$。因而$0\in L_g{}^*$且对于L_g上的点z有

$$\begin{aligned}\rho(z,g^{-1}0)&=\rho(z,\sigma_g\sigma_g{}^*0)\\&=\rho(\sigma_g z,z_g{}^*0)\\&=\rho(z,0)\end{aligned}$$

于是L_g与线段〔$0,g^{-1}0$〕的双曲平分线重合，因此$\Pi_G(\zeta)$就是相应的Dirichlet多边形。

若$\zeta=\infty$，则$L_g{}^*$是欧氏直线。于是g是L_g上的欧氏等距变换，因此L_g必是g的等距圆周。由$\infty\in H_g$，知$\Pi_G(\zeta)$是位于所有等距圆周外部的区域。

剩下的问题是证明$\Pi_G(\zeta)$是G在P内的基本域。当$\zeta\in P$时这是正确的，因为我们已证明这时的$\Pi_G(\zeta)$是Dirichlet多边形。而由于(9.5.2)式，当$\zeta\notin P\cup\partial P$时结论也成立。

余下的情况是$\zeta\in\partial P$。这时可应用（9.5.4）式并假设$P=H^2$，$\zeta=\infty$。首先有

$$\begin{aligned}g^{-1}&=\sigma_g\sigma_g^*\\&=\sigma_g^*\ (\sigma_g^*\ \sigma_g\sigma_g^*\ )\end{aligned}$$

括号内的表达式是关于$\sigma_g{}^*$（L_g）的反射。因此，由g^{-1}的分解的唯一性，有

$$\begin{aligned}L_{g^{-1}}&=\sigma_g^*(L_g)\\&=g(L_g)\end{aligned}$$

这意味着$L_{g^{-1}}$分隔$g(H_g)$和$g(K_g)$。由点

$$g^{-1}(\zeta)=\sigma_g\sigma_g^*(\zeta)$$
$$=\sigma_g(\zeta)$$

属于K_g，推出$\zeta\in g(K_g)$；因此有

$$g(H_g)=K_{g^{-1}}$$

故而

$$g(\Pi_G(\zeta))\cap\Pi_G(\zeta)=\phi$$

显然，这意味着$\Pi_G(\zeta)$在不同元素g和h映射下的象不相交。

考虑H^2中任意一点z。因∞是G的一个常点，而z的轨道又位于欧氏平面的某个紧圆盘之中，故在z的轨道中必定存在某个点z'使得对G中所有的元素g满足

$$\operatorname{Im}[z']\geqslant\operatorname{Im}[gz]$$

由g在K_g中的点上的作用使虚部增加而知z'位于每个圆周L_g上或其外部。随之而推出射线（z',∞）位于每条L_g的外部，故属于$\Pi_G(\zeta)$。因此每点z必等价于$\Pi_G(\zeta)$的闭包中的某个点。 □

注：关于$\Pi_G(\infty)$是基本域的证明也可以用欧氏术语包括导数运算来写；比如

$$H_g=\{z:|g^{(1)}(z)|<1\}$$

不过，采用上面给出的固有的方法似乎更好一些。

最后，注意到若$P=\Delta$，$\zeta=0$，则可从（9.5.3）和定理9.5.2推出

$$D_G(0)=\Pi_G(\infty)$$
$$=\Delta\cap F_G$$

这就是（9.5.1）。

习题 9.5

1．采用本书的记号，以σ'_g表示关于$L'_g(=g(L_g))$的反射。试证明

$$L^*{}_{(g^{-1})}=L^*{}_g, \qquad g^{-1}=\sigma^*_g\sigma'_g$$

2．试证明：按照L_g与L^*_g相交、平行或不相交，g分别为椭圆、抛物或双曲元素。并证明

（i）　若g为椭圆元素，则其必以L_g和L^*_g的公共点为不动点；

（ii）　若g为抛物元素，则其必以L_g和L^*_g的公共切点为不动点；

（iii）　若g为双曲元素，则它的两个不动点是关于L_g，L_g^*和$L_g{}^{-1}$的反演点（即对称点）。

3．设g是抛物元素，且不以∞为不动点。以r_n表示g^n的等距圆周的半径。求证：$r_n=r_1/|n|$

4．设I和I'是某个双曲元素g和g^{-1}的等距圆（g不以∞为不动点）。证明：$g(I)=I'$。试比较在g^n映射下I和I'的像以及g^n和g^{-n}的等距圆周。

§9.6　关于陪集分解的基本域

设G是作用于Δ上的$Fuchs$群，以H表示G的子群。构造一个与H相关联的G的基本域常常会带来方便。为此，我们假定G具有陪集分解

$$G=\bigcup_n g_n H \tag{9.6.1}$$

这种构造的实质就是寻求H-不变集Σ，使得诸$g_n(\Sigma)$镶拼成Δ；如果某个D的H-像镶拼成Σ，那么D就是G在Δ中的基本域。

假定Σ在H作用下是稳定的，即当$g\in H$时$g(\Sigma)=\Sigma$，

否则$g(\Sigma)\cap\Sigma=\phi$。每个陪集g_nH唯一地确定一个相应的集$g_n(\Sigma)$（且与g_n的选取无关，只要是确定同一个陪集）。当$m\neq n$时，由$(g_m)^{-1}g_n\notin H$而有

$$g_n(\Sigma)\cap g_m(\Sigma)=\phi \tag{9.6.2}$$

另一个假设条件是

$$\bigcup_n g_n(\tilde{\Sigma}) = \Delta$$

后两个式子是从基本域定义中想到的，不过此处是就G的陪集表示而不是就G所有元素成立的关系式。

定理9.6.1 设G是作用在Δ上的$Fuchs$群，H是使G具有陪集分解式（9.6.1）的子群。假定Π是H的凸基本多边形，Σ是Δ的一个开凸多边形，满足

（1）Σ在H作用下是稳定的；

（2） $$\bigcup_n g_n(\tilde{\Sigma})=\Delta$$

则$\Pi\cap\Sigma$是G在Δ中的一个基本域。

［证］ 首先，$\Pi\cap\Sigma$是开集并且是凸的，它的边界具有零面积。因而只需要证明

$$\bigcup_{g\in G} g(\widetilde{\Pi\cap\Sigma})=\Delta \tag{9.6.3}$$

以及当f和g是G的不同元素时有

$$g(\Pi\cap\Sigma)\cap f(\Pi\cap\Sigma)=\phi \tag{9.6.4}$$

若$z\in\Delta$，则由条件（2）知存在某个n使$g_n^{-1}(z)$属于$\tilde{\Sigma}$。因只有Π的有限多个H-像与$g_n^{-1}(z)$的某个邻域相交，故对H中某个h_n有

$$h_ng_n^{-1}(z)\in\tilde{\Pi}$$

且因$g_n^{-1}(z)\in\tilde{\Sigma}$又有

$$h_ng_n^{-1}(z)\in h_n(\tilde{\Sigma})=\tilde{\Sigma}$$

于是$h_n g_n^{-1}(z) \in \widetilde{\Pi} \cap \widetilde{\Sigma}$，这就验证了（9.6.3）式。

最后，若设（9.6.4）不成立，则有

$$f(\Pi\cap\Sigma)\cap g(\Pi\cap\Sigma)\neq\phi$$

由（9.6.1）式知，可将f和g表示为

$$f=g_n h_n\ ,\ g=g_m h_m \qquad (h_j\in H)$$

因而

$$g_n(\Sigma)\cap g_m(\Sigma)=f(\Sigma)\cap g(\Sigma)\neq\phi$$

从（9.6.2）式推出$g_n=g_m$，故有

$$h_n(\Pi)\cap h_m(\Pi)\supset g_n^{-1}(f(\Pi\cap\Sigma)\cap g(\Pi\cap\Sigma))\neq\phi$$

由Π是H的基本域，推出$h_n=h_m$，于是$f=g$。 □

我们来考察三个例子；在这三个例子中H分别是G的抛物、椭圆和双曲循环子群。

例9.6.2 设$H=\langle h\rangle$，其中h是抛物元素。通过考虑共轭群不妨设G作用在H^2上，且$h(z)=z+1$。$G-H$中的每一个元素都有等距圆周。我们以Σ表示那种存在某个邻域不与任何等距圆周相交的点的集合。显然满足定理9.6.1的假设条件（参看9.5节或〔52〕的58页，后者更详尽），因而（例如）位于所有等距圆周外部且属于某个带域$\{x+iy:y>0,\ x_0<x<x_0+1\}$的点$z$的集合就是$G$的一个基本域。

例9.6.3 设$H=\langle h\rangle$，其中h是椭圆元素。不妨设G作用在H^2上，且$h(z)=e^{2\pi i/n}z$。仍取所有等距圆周的外部的点的集合为Σ；与之等价的，我们可遵从以O为中心的Dirichlet多边形的构造，把Σ定义为半平面

$$\{z\in\Delta:\rho(z,0)<\rho(z,g0)\}$$

的交集，g取遍所有满足$g0\neq0$的元素。H的基本域是Δ的一

个扇形

$$\Pi = \{z: \theta < \arg z < \theta + 2\pi/n\}$$

（对任何θ），且$\Pi \cap \Sigma$是G的基本域。

例9.6.4 设$H = \langle h \rangle$，其中h是双曲元素。此外，还假定h是简单双曲元素，因而h的轴A是H下的稳定集。若$g \notin H$，则A和$g(A)$不相交，并且集

$$K_g = \{z: \rho(z, A) < \rho(z, gA)\}$$

是个半平面。显然，由下式

$$\Sigma = \bigcap_{g \notin H} K_g$$

定义的Σ满足定理9.6.1的条件，因而任取适当的Π（例如由正交于A的测地线L和gL围成的区域）都可得出G的基本域。

习题 9.6

1. 验证例9.6.2，9.6.3和9.6.4的细节。

2. 试证明例9.6.2中所构造的基本域D的边界上的任何循环必定位于以∞为基点的某个极限圆周上。

§ 9.7 边偶变换

设G是Fuchs群，P是G的凸基本多边形。已知P的边偶元素生成G（定理9.3.3）；本节要来表征G中可以作为所选取的某个P的边偶元素的那些本原元素。

G中每个本原椭圆元素和本原抛物元素可使某个基本域（实际上是某个Dirichlet多边形）的边配成对；这可从例9.6.2和9.6.3或从定理9.4.5和推论9.2.9推出。因而问题在

于表征G中本原的边偶双曲元素。

定理9.7.1 若g是Fuchs群G的本原双曲元素，A是g的轴，则当且仅当对G中所有的h均有$h(A)=A$或$h(A)\cap A=\phi$时g使某个凸基本多边形P的边配成对。

［证］ 首先设$h(A)=A$或$h(A)\cap A=\phi$，且命

$$H=\{h\in G: h(A)=A\}$$

则H包含所有g的幂；H可能包含的其它元素只能是不动点在A上的二阶椭圆元素。如同例9.6.4那样，我们可构造集Σ使之满足定理9.6.1的条件。不妨设G作用于H^2上且$g(z)=kz$；若H是由g生成的循环群，则可取

$$\Pi=\{z\in H^2: 1<|z|<k\}$$

若H不是循环群，而是由g和某个二阶椭圆元素生成的，则可设该椭圆元素以$i\sqrt{k}$为不动点，且可取

$$\Pi=\{z\in H^2: 1<|z|<k, \mathrm{Re}[z]>0\}$$

在这两种情况中，g都使$\Pi\cap\Sigma$的边配成对，这些边分别包含有$|z|=1$和$|z|=k$的弧段。

为证明关于h和A的条件的必要性，我们假定g使某个P的两条边s和s'配成对。在s的相对内部选取一点w使其不是G的任何非平凡元素的不动点；若命$\gamma=[w, gw]$，则除去端点w和gw外γ均包含在P中。曲线

$$\Gamma=\bigcup_{n} g^n(\gamma)$$

是Δ中的一条g-不变简单曲线。顺便指出，g的轴A也具有这些性质。

若假定$h(A)\cap A\neq\phi$，则存在G内某个h使得测地线A和$h(A)$相交或重合（由定理5.1.2知，它们不可能平行）。设A与$h(A)$相交。这意味着曲线Γ与$h(\Gamma)$也彼此相交，

比如说交于Δ内一点ζ。这推出对γ内某个z_1和z_2以及某个m和n，有

$$\zeta = g^n z_1 = h g^m z_2$$

从而

$$z_1 = g^{-n} h g^m z_2$$

但γ上只有两个点w和gw是G-等价的，因此$z_1 = z_2$或$z_1 = gz_2$或$z_2 = gz_1$。对所有这些情形，$g^i h g^j$以γ上某个点为不动点。由于我们所构造的γ没有一点是G的任何非平凡元素的不动点，因而h是g的某个幂。这意味着$h(A) = A$。 □

鉴于定义8.1.5，我们已证明G的边偶元素只能是椭圆、抛物和简单双曲元素。

§ 9.8 Poincaré 定理

作用于Δ上的任何Fuchs群G具有凸基本多边形P。G在P上的作用是镶拼圆盘Δ，且存在一族边偶映射g_s生成G。P在一个循环的各点上的内角和是2π的几分之一（定理9.3.5）。Poincaré定理阐述了它的逆过程，因而提供了一种构造Fuchs群的方法。设从一个多边形P和一族边偶映射出发。先用这些映射生成一个群G，再引入一种循环概念（此处并不知道这种循环是不是P同G-轨道的交），并给每个循环加上一个适当的角度条件。这样做目的是证明G是离散群，P是G的基本域。

由于在别的几何学及不同维数的空间中也提出过这些思想，因而有必要以完全一般的形式进行讨论。先作出必要的假设，最后再给出此结果的决定性陈述。所采用的论证方法

可概述如下：首先构造一个由群的作用镶拼而成的空间X^*，然后设法使之与多边形P在原空间中的G-象同化。

先来构造一个镶拼空间。设X是任一非空集，假定

（$A1$）　P是X中的一个抽象多边形。

这意味着P是X的非空子集，且相应有一个X的非空子集族，族中每个子集s_i称为P的边。这些边的并用∂P表示；我们要求P与∂P不相交，且记

$$\widetilde{P} = P \cup \partial P$$

又假定

（$A2$）　存在P的一种边偶Φ。

确切地说，这意味着存在P的边的集合到自身的对合（或自返）映射$s \mapsto s'$，且对应于每一个边偶（s, s'）均存在X到自身的双射g_s，满足

$$g_s(s) = s'$$

和

$$g_{s'} = (g_s)^{-1}$$

设G是由g_s生成的群，构作笛卡尔乘积$G \times \widetilde{P}$。十分有益的是将$G \times \widetilde{P}$看成是用G来标记的一族互不相同的$\widetilde{P}$的副本

$$(g, \widetilde{P}) = \{(g, x): x \in \widetilde{P}\}$$

而将（g,x）视为$g(P)$范围内的点$g(x)$。现在把由群G所提供的这些付本沿着它们的公共边连接起来。首先注意到映射hg_sh^{-1}可以看成是$h(P)$的边$h(s)$到下列两种边的映射

（i）　$h(P)$的边$h(g_s s)$；

（ii）　$(hg_s)(P)$的边$(hg_s)(s)$。

记$g = hg_s$，因而希望将（g,s）与（$h,g_s s$）同化。这种同化

可通过在$G\times\widetilde{P}$上定义关系$\sim$而得以实现，即约定当且仅当

(i) $g=h, x=y$；或者

(ii) $x\in s, y=g_s(x)$，$g=hg_s$

满足时，有

$$(g,x) \sim (h,y)$$

这种关系是对称的并且是自反的（但不必是传递的），而且可扩充为$G\times\widetilde{P}$上等价关系$*$，其定义为

$$(g,x)*(h,y)$$

当且仅当对某些(g_i,x_i)有

$$(g,x)=(g_1,x_1) \sim (g_2,x_2)\sim\cdots\sim (g_n,x_n)=(h,y)$$

包含(g,x)的等价类记为$\langle g,x\rangle$，且以X^*表示（等价类的）商空间。注意到，若

$$\langle g,x\rangle=\langle h,y\rangle$$

则

$$g(x)=h(y) \tag{9.8.1}$$

而且

$$\langle fg,x\rangle=\langle fh,y\rangle \tag{9.8.2}$$

附带指出，若$x\in P$，则

$$g=h,\quad x=y \tag{9.8.3}$$

这些事实对$\sim$成立，因而对$*$也成立。

G中每个f按照规则

$$f^*:\langle g,x\rangle\longmapsto\langle fg,x\rangle$$

诱导出一个映射f^*：$X^*\to X^*$；由（9.8.2）式知这种定义是完全确定的。显然，

$$(f^{-1})^*=(f^*)^{-1}$$

且

$$(fh)^* = f^* h^*$$

因此所有这样的f^*的群G^*是X^*到自身的双射群，而$f \mapsto f^*$是G到G^*的同态。事实上，这是一个同构，因为若$f^* = g^*$，则可选取P中的x并注意到

$$\begin{aligned}\langle f, x\rangle &= f^* \langle I, x\rangle \\ &= h^* \langle I, x\rangle \\ &= \langle h, x\rangle\end{aligned}$$

而由$x \in P$和（9.8.3）式推知这意味着$f = h$。

若定义

$$\langle P\rangle = \{\langle I, x\rangle : x \in P\}$$

并且对$\langle \widetilde{P}\rangle$也作类似定义，即可发现$G^*$在$\langle P\rangle$上的作用就下述意义镶拼成了$X^*$：

$$\bigcup_{g^*} g^* \langle \widetilde{P}\rangle = X^* \tag{9.8.4}$$

又若$g^* \neq h^*$，则

$$g^* \langle P\rangle \cap h^* \langle P\rangle = \phi \tag{9.8.5}$$

证明是平凡的。

容易说明这种镶拼适合于开头所提出的问题。由(9.8.1)式知，存在一个由式

$$\alpha \langle g, x\rangle = g(x)$$

给出的自然映射α：$X^* \to X$，并且有如下结果。

命题9.8.1 (i) 若α是满射，则

$$\bigcup_{g \in G} g(\widetilde{P}) = X$$

(ii) 若α是内射，则对于G内不同的g和h有

$$g(P)\cap h(P)=\phi$$

其证明（同(9.8,4)和(9.8.5)的证明一样）是平凡的，从略。顺便提一下，到现在为止我们并未涉及到拓扑。

现在来引入拓扑：我们作如下的明确假设。

（$A3$） X是具有度量d的度量空间；

（$A4$） g_s是X到自身的等距变换；

（$A5$） P是连通开集。

为了分析映射α，以便应用命题9.8.1，我们引入自然映射

$$\beta:\ G\times\widetilde{P}\to X^*$$
$$\gamma:\ G\times\widetilde{P}\to X$$

它们分别定义为

$$\beta(g,x)=\langle g,x\rangle$$
$$\gamma(g,x)=g(x)$$

注意到

$$\gamma=\alpha\beta \tag{9.8.6}$$

因而下图是可交换的。

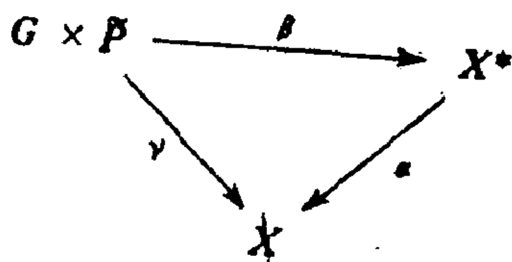


图 9.8.1

赋予G以离散拓扑，$G\times\widetilde{P}$以乘积拓扑，X^*以商拓扑。商映射β当然连续。其次，γ也连续，因为若A为X中开集，

则

$$\gamma^{-1}(A)=\bigcup_{g}\{g\}\times(g^{-1}(A)\cap\widetilde{P})$$

而这是$G\times\widetilde{P}$中的开集。最后，由γ连续，知α也连续，这是因为当且仅当$\beta^{-1}\alpha^{-1}(A)$是$G\times\widetilde{P}$中开集时$\alpha^{-1}(A)$才是X^*中开集。

G中每个f诱导出一个映射$\widetilde{f}:G\times\widetilde{P}\to G\times\widetilde{P}$，其对应规则为

$$\widetilde{f}:(g,x)\to(fg,x)$$

显然，$\widetilde{f}$是$G\times\widetilde{P}$到自身的同胚，这种$\widetilde{f}$的群与G同构且有

$$\beta\widetilde{f}=f^*\beta$$
$$\gamma\widetilde{f}=f\gamma$$

从而

$$\alpha f^*\beta=\gamma\widetilde{f}=f\gamma \tag{9.8.7}$$

附带指出，若A是X^*的开子集，则

$$\beta^{-1}(f^*)^{-1}(A)=(\widetilde{f})^{-1}\beta^{-1}(A)$$

是$G\times\widetilde{P}$中开集。由此推出$(f^*)^{-1}(A)$是开集，从而f^*连续。因$(f^*)^{-1}=(f^{-1})^*$，而知f^*是X^*到自身的同胚。

代替直观的角度条件的最后一个假设条件是一个形式化的与维数无关的条件，这使我们能够比较容易地表达证明的形式化细节。我们需要一个能够保证∂P上每一点x都存在(局部)镶拼邻域的条件。这个条件必须表达出这样一个事实，即局部镶拼几何与等价关系$*$一致，并且没有什么比之更少却又适当的条件了。

为了简要地表达这一条件，可假定

$$\langle I, x\rangle = \{(g_1, x_1), \cdots, (g_n, x_n)\}$$

则某个 (g_j, x_j) 是(I, x)并且

$$g_1(x_1) = \cdots = g_n(x_n) = I(x) = x$$

若

$$N_j = \{ y\in\widetilde{P} : d(y, x_j) < \varepsilon \}$$

（这是$\widetilde{P}$中以x_j为中心以ε为半径的球），则 $g_j(N_j)$是 $g_j(\widetilde{P})$的子集并且具有公共点x（$= g_j(x_j)$）。因g_j是等距映射，故有

$$g_j(N_j) \subset \{ y\in X : d(y, x) < \varepsilon\}$$
$$= B(x, \varepsilon)$$

我们希望加上一个条件使得对所有充分小的ε，诸集合$g_j(N_j)$镶拼$B(x, \varepsilon)$。形式地，我们假设

（$A6$） $\widetilde{P}$中每点x具有一个有限等价类

$$\langle I, x\rangle = \{(g_1, x_1), \cdots, (g_n, x_n)\}$$

而且对所有充分小的ε均有

$$\bigcup_{j=1}^{n} g_j(N_j) = B(x, \varepsilon)$$

此外，对$\beta(x, \varepsilon)$中的每个点w，$\bigcup(g_j, N_j)$中被γ映成w的点的集合是一个等价类。

注意到我们正在寻求的结果可以通过称$G\times\widetilde{P}$中经γ可映为X中任一点w的点的集合为等价类（从而α是双射）而得到表达。因此，（$A6$）表现为所要求的整体结果的局部形式。再注意到$\langle f, x\rangle$是$\langle I, x\rangle$在f^*下的像，从而每个等价类都是有限的。

令

$$W=\bigcup_j (g_j, N_j), \quad V=\beta(W)$$

条件（A6）意味着$\gamma(W)=B(x,\varepsilon)$，且$W$是等价类的并。换句话说，即是

$$\beta^{-1}(V)=\beta^{-1}(\beta W)=W$$

从而推出V是X^*中的开集。

为了完成细节的证明，我们需要如下的结果。

命题9.8.2 诸集合$f^*(V)$是X^*的一个拓扑基。

［证］ 已知集$f^*(V)$是开集。设A是X^*的开子集，并且$\langle f,x\rangle\in A$。将$\langle I,x\rangle$表示成（A6）中的形式，即推出

$$\langle f,x\rangle=\{(fg_1,x_1),\cdots,(fg_n,x_n)\}$$

因β连续，故

$$\beta^{-1}(A)=\bigcup_{h\in G}(h,A_h)$$

其中每个A_h均是$\widetilde{P}$中的开集。由(fg_j,x_j)属于$\beta^{-1}(A)$，而知当$h=fg_j$时$x_j\in A_h$，故对于这些h有$A_h\neq\phi$。选取ε充分小，使得（A6）成立并且当$h=fg_j$时有$N_j\subset A_h$（这是可能的，因为j只取值$1,\cdots,n$，而这些A_h都是$\widetilde{P}$中的非空开集）。显然，这意味着

$$\widetilde{f}(W)=\bigcup_j(fg_j,N_j)\subset\beta^{-1}(A)$$

从而

$$\begin{aligned}f^*(V)&=f^*\beta(W)\\&=\beta\widetilde{f}(W)\\&\subset A\end{aligned}$$

因$(I,x)\in W$，故$\langle f,x\rangle$（即$\beta\widetilde{f}(Ix,)$）属于$f^*\beta(W)$而这就是$f^*(V)$。 □

现在着手进行一般情况的讨论。首先，由（9.8.7）式有

$$\alpha f^*(V) = \alpha f^*\beta(W)$$
$$= f\gamma(W)$$
$$= B(fx, \varepsilon)$$

因此，α把每个$f^*(V)$映成开集，即α：$X^* \to X$是开映射。

其次，若v和u属于$f^*(V)$并且$\alpha(u) = \alpha(v)$，则可选取$\widetilde{f}(w)$中的点u'和v'满足$\beta(u') = u$，$\beta(v') = v$。于是

$$\gamma(u') = \alpha\beta(u') = \alpha\beta(v') = \gamma(v')$$

故由（A6）可知u'和v'属于同一等价类；因此

$$u = \beta(u') = \beta(v') = v$$

这推出α是每个$f^*(V)$到$f\gamma(W)$的双射，因而是同胚。

再次，X^*是一个$Hausdorff$空间。为了解这一点，在X^*内选取不同两点

$$\langle f, x\rangle = \{(f_1, x_1), \cdots, (f_n, x_n)\}$$
$$\langle g, y\rangle = \{(g_1, y_1), \cdots, (g_m, y_m)\}$$

它们是$G \times \widetilde{P}$的不相交子集。按照（A6）选取N_i对应于$\langle I, x\rangle$，并设M_j是关于$\langle I, y\rangle$的对应集。我们可选取N_i，M_j，使得

$$\bigcup_i (f_i, N_i), \quad \bigcup_j (g_j, M_j) \tag{9.8.8}$$

是$G \times \widetilde{P}$中的不相交集（若$f_i \neq g_j$，则(f_i, N_i)与(g_j, M_j)不相交；若$f_i = g_j$则$x_i \neq y_j$且可要求N_i与M_j互不相交）。由于不相交集（9.8.8）中的每一个都是等价类的并，故可推知它们的β-像也是不相交的（并且是开集）；于是，X^*是

$Hausdorff$空间。

最后，X^*还是一个连通空间。事实上，因$\widetilde{P}$连通，$(g, \widetilde{P})$和它的β-像$\langle g, P\rangle$也连通。注意到若$x\in s'$，则

$$\langle g, x\rangle = \langle gg_s, (g_s)^{-1}x\rangle$$

从而

$$\langle g, \widetilde{P}\rangle \cap \langle gg_s, \widetilde{P}\rangle \neq \phi$$

这推出

$$\langle g, \widetilde{P}\rangle \cup \langle gg_s, \widetilde{P}\rangle$$

是连通集；因此，由每个g都是g_s的一个乘积可知X^*是连通的。下一个结果是对前面所得结果的一个概括。

命题9.8.3 X^*是连通的$Hausdorff$空间。并且X^*中每个x^*都具有一个开邻域N^*，使得a在N^*上的限制是N^*到X的一个开子集的同胚。

现在来研究对我们最有用的情况。设(X, d)是具有双曲度量的双曲平面(我们的论证也适用于欧氏平面或球面S^2)，P是一个双曲多边形(可能在无穷远圆周上有顶点和自由边；这些都不属于X)，而Φ是给定的某个边偶等距对应的集。我们的目的是要证明G是离散群，P是G的基本域。顺便指出，$(A1)\sim(A5)$仍成立，且不需要对无穷远圆周上的点检验$(A6)$。

条件$(A6)$容易改写成更简单的形式。若x属于P，则可选取ε使得以x为中心以ε为半径的开圆盘N包含于P。对于N中每一点y，等价类$\langle I, y\rangle$只包含(I, y)，因而对如此选择的x，$(A6)$显然成立。其次，设x是一条边s的内点。则x属于P的唯一的一条边，这直接推出$\langle I, x\rangle$恰好包含(I, x)和$(g_s^{-1}, g_s x)$的事实。显然，在这种情况下，只要$g_1(N_1)$

$\cup g_2(N_2)$ 是x的邻域（这将隐含在假设条件中），（$A6$）就也成立（此时W是两个半圆盘的并）。

于是我们看出（$A6$）可以单用P的顶点加以改写，事实上，此时（$A6$）等价于

（$A6$）′对于P的每个顶点x，存在P的一组顶点 $x_0(=x)$，x_1，…，x_n和G的一组元素 f_0（$=I$），f_1，…，f_n，使得诸$f_j(N_j)$互不重叠并且它们的并是$B(x,\varepsilon)$，此外，还使得对某个s，每个f_{j+1}均具有$f_j g_s$的形式（$j=1, 2, \cdots, n$；$f_{n+1}=I$）。

我们还假定

（$A7$）　在（$A6$）中的ε可取成与$\tilde{P}$中的点x无关。

最后这个假设条件保证了X中每条曲线都可以被提升为X^*中的曲线（因为每一点均可回到$\tilde{P}$，因而至少提升一个距离ε），因此（X^*，α）是X的无约束光滑覆盖曲面，从而α把X^*映成X。因X为单连通，单值性定理表明α是同胚，于是从命题9.8.1即推出欲求的结果。我们已证明了。

定理9.8.4（Poincaré定理）　对于具有边偶Φ满足（$A6$）′和（$A7$）的多边形P，G是离散群，P是G的基本多边形。

注：若X中没有P的顶点，则（$A6$）′自然成立。然而此时（$A7$）却不必成立。

例9.8.5　设P是具有r条边的多边形，且在X中的顶点v_i处的角度为π/n_j（$j=1,2,\cdots,r$）。对于每条边s，若设g_s是越过s的反射，且以g_1，…，g_r表示这些映射，则（$A6$）′成立（参看图9.8.2），（$A7$）也成立（本质上是由于$\tilde{P}$是紧集）因此P是G的基本域。

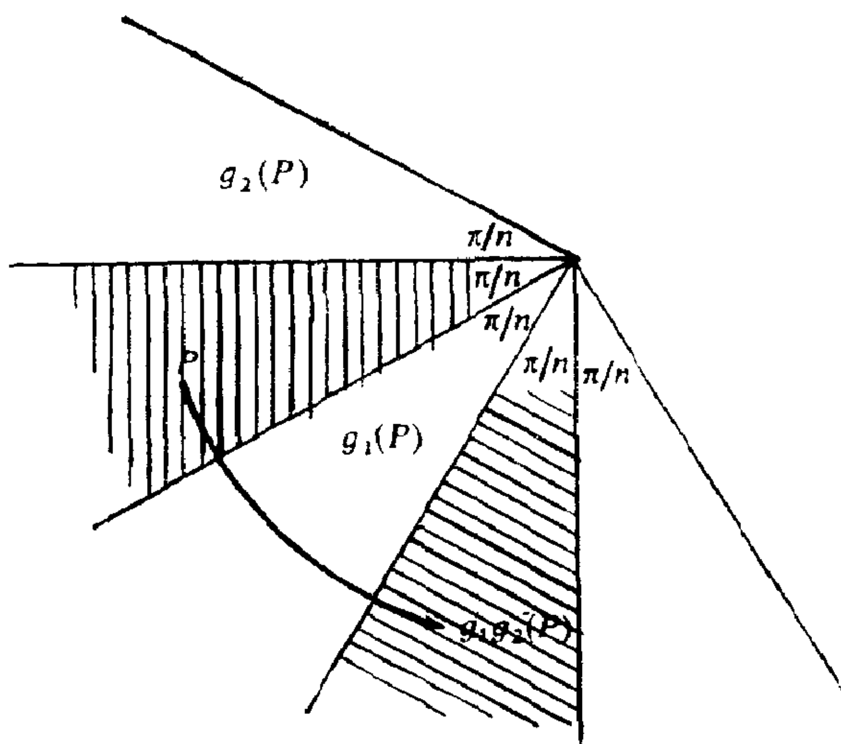


图 9.8.2

今后我们还需要用到下一个结果，它与Poincaré定理密切相关。设P是Δ中的一个开双曲多边形，Φ是P的边偶映射集。我们恒假定若x是边s的内点且具有对应点$y=g_s(x)$，则对x和y的相对于P的任何邻域N_x和N_y，集

$$N_x\cup(g_s)^{-1}(N_y)$$

是x的邻域（因此N_x和$(g_s)^{-1}N_y$位于s的两侧并紧靠x点）。

最后，对每个g和每点z，定义

$$\theta(z)=\sum_{g\in G}\theta_g(z)$$

其中$\theta_g(z)$是$g(P)$在z点所对的角。若$z\in g(P)$，则$\theta_g(z)=2\pi$；若$z\notin g(\overline{P})$，则$\theta_g(z)=0$。

定理9.8.6 设P是在Δ中具有紧闭包的双曲多边形，Φ是满足上述所给假设条件的边偶映射集。如果这些边偶元素生

成的群G是离散群，则$\theta(z)$在Δ上为常数，设为$2\pi k$，而k必为整数，且

$$\mathrm{h}-area(P)=k\mathrm{h}-area(\Delta/G)$$

［证］　设V是P的所有顶点的所有像点的集合；由G的离散性知，在Δ中V只含孤立点。设B是∂P的所有像集的并；由离散性推出，B是Δ的闭子集并且显然有$V\subset B$。

$\Delta-B$是开集，因而是一些区域Δ_j的不相交并。由定义知，每个Δ_j或者位于$g(P)$的内部，或者与$g(P)$不相交，因此在整个Δ_j上θ_g或都等于2π或都等于0。这就推出在每个Δ_j上$\theta(z)$等于某个常数$2\pi k_i$，而k_i是整数。

其次，考虑$B-V$中的点w。边偶对应的假设条件保证了存在由不同元素组成的元素对（g_j，g_j^*），$j=1,\cdots,n$使得w位于$g_j(P)$和$g_j^*(P)$的公共边的内部；并且对所有其它的g，在w点邻近（即w的邻域内）$\theta_g(z)$为常数（0或2π）。由离散性知，可取定这样一个邻域N，使其对所有其它的g都适用。因每个表达式

$$\theta_{g_j}(z)+\theta_{g_j^*}(z)$$

在w邻近都是常数2π；故$\theta(z)$在w邻近也是常数。我们断言$\theta/2\pi$在区域$\Delta-V$上连续并且取整数值。因V只包含孤立点，故θ在$\Delta-V$上为常数。类似的论证对V中的点w也成立；只是这时推不出有用的结果。

最后，设Q是离散群G的任一开基本多边形；对于任何集A，设χ_A是A的特征函数。对Δ中几乎一切的点z有

$$\sum_g \chi_{g(Q)}(z)=1$$

及

$$k = \sum_g \theta_g(z)/2\pi$$

$$= \sum_g \chi_{g(P)}(z)$$

因此，在以μ表示双曲面积并约定以下的所有积分都取在Δ上时就有

$$\mu(P) = \int \chi_P(z) \left[\sum_g \chi_{g(Q)}(z)\right] \mathrm{d}\mu(z)$$

$$= \sum_g \int \chi_P(z)\chi_{g(Q)}(z)\mathrm{d}\mu(z)$$

$$= \sum_g \int \chi_{g^{-1}(P)}(w)\chi_Q(w)\mathrm{d}\mu(w)$$

$$= \sum_{g-1} \int \chi_{g^{-1}}(p)(w)\chi_Q(w)\mathrm{d}\mu(w)$$

$$= \int \chi_Q(w) \left[\sum_h \chi_{h(P)}(w)\right] \mathrm{d}\mu(w)$$

$$= k\mu(Q)$$ □

事实上，定理9.8.6是说，如果我们将P的边同化，就可得到紧空间Δ/G的一个分支覆盖；因此这个覆盖就是对某个k的$k-1$映射。

习题 9.8

1. 将（A7）代之以（A7）′，Poincaré定理仍有效；

（A7）′ 存在正数ε，使得对$\tilde{P}$中所有的x，在$B(x,\ \varepsilon)$中存在α^{-1}的单值分支。

试证明当某个v_j位于无穷远圆周上时（这个v_j是G中某个抛物元素的不动点，以v_j为基点的极限圆盘被适当地镶拼），例9.8.5中的应用仍有效。

2. 题1中的思想也可推广到有几个顶点在无穷远圆周上的多边

形，只要这些顶点都是G中抛物元素的不动点即可（相反的情况见题3)。

3．题2中关于抛物元素的条件是本质的。试证明：$g: z \to 2z$ 是

$$P = \{ z \in H^2 : 1 < \mathrm{Re}[z] < 2 \}$$

的边偶元素，但P不是G（$=\langle g \rangle$）在H^2中的基本域。

然而可以证明，若考虑在第一象限内的这个P和G，并且以$ds = (|z|/xy)|dz|$为度量，则Poincaré定理是可应用的。

4．设 $X = C - \{0\}$，度量为$ds = |dz|/|z|$。对于$(0, 2\pi)$中的θ，令

$$P = \{ z \in X : 1 < |z| < 3, 0 < \arg(z) < \theta \}$$

把∂P按照显然的方式分成四条边，且由边偶元素

$$g(z) = 3z, \quad h(z) = e^{i\theta} z$$

生成G。试通过考虑覆盖曲面X^*来研究$\theta = 2\pi p/q$的情况，其中$(p, q) = 1$(即使X不是单连通，覆盖曲面也存在)。我们可以将其看成X的多重镶拼。

§ 9.9 注 记

还有其它的基本多边形构成，例如，与具有紧致商空间的群有着某种特定关系（换位子乘积）的多边形构成。对此可进而参阅文献〔46〕,〔47〕,〔52〕,〔70〕,〔85〕,〔86〕,〔114〕。关于凸基本多边形的其它信息，可参看〔71〕,〔72〕,〔73〕,〔83〕;关于Poincaré定理(9.8节）的新进展可参看〔24〕,〔48〕和〔62〕。定理9.8.6是由〔48〕给出的。

第十章　有限生成群

§ 10.1 边数有限的基本多边形

我们回顾一下，所谓一个凸基本多边形P的边s是指形如$\tilde{P}\cap g(\tilde{P})$的线段（$g$是二阶椭圆元素的情形，除外，此时该集合可以看成是两条边）。关于P的棱，则指的是∂P中的最大测地线段。我们不仅要注意区分边和棱，而且要使读者确信这样做的必要性。首先举一个例子，在这个例子中，一条棱包含了无限条边。

例10.1.1　我们在H^2中讨论之。对$n=0, 1, 2, \cdots$，设C_n是以$1+4n$和$3+4n$为端点的测地线，C_n'是它关于虚轴的反射，对每个n，设g_n是保持H^2不变且把C_n外部照射成C_n'内部的双曲元素，且设G是由g_n生成的群。由*Poincaré*定理（9.8节）知，位于所有C_n和C_n'的外部的那个区域是关于G的一个基本域。

现设D是所有C_n'的外部在第二象限内的区域，置

$$D_n=\{x+\mathrm{i}y:\ x>0,\ y>0,\ 4n<|z|<4(n+1),\ |z-(4n+2)|\geq 1\}$$

见图10.1.1显然

$$P=D\cup\left(\bigcup_{n=0}^{\infty}g_n[D_n\cup C_n]\right)$$

是关于G的一个凸基本多边形，且正虚轴是P唯一的一条棱

e。但由于对每个n均有

$$g_n^{-1}(\widetilde{P}) \cup \widetilde{P} = [4in, 4i(n+1)]$$

所以棱e包含P的无限条边。

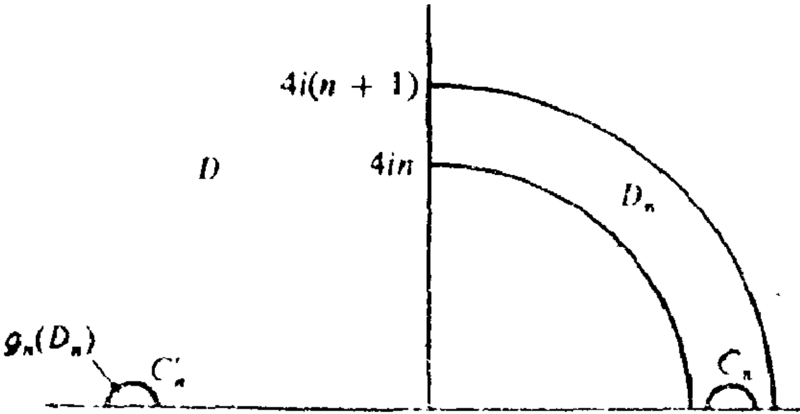


图 10.1.1

考虑到上面的例子和我们将要讨论的多边形的边数，必须使棱与边清楚地区别开来。

定理10.1.2 若G是具有Nielsen区域N的非初等Fuchs群，则下列命题等价。

（1）G是有限生成群；

（2）对G的任一凸基本多边形P，有

$$\text{h-area}(P \cap N) < +\infty$$

（3）存在G的一个凸基本多边形，它的边数有限。

（4）G的任何凸基本多边形的边数有限。

［证］ 显然，（4）蕴含（3）。现设（3）成立，即设P是一个边数有限的凸基本多边形。因P的每条闭自由边λ_i（$i=1$，…，m）位于一个具有间断σ_i的区间内部，其中σ_i决定一个包含N的半平面Hi（参看8.5节），所以

$$P_1 = P \cap H_1 \cap \cdots \cap H_m$$

是没有自由边的边数有限多边形，因而其双曲面积有限。由于P_1包含$P \cap N$，故我们可看出，对这样选定的P，(2)也成立。然而，由N是G-不变的，易知h-area$(P \cap N)$与P的选取无关，从而得到(2)。

下面，我们来证明(2)蕴含(1)。首先，记$Q = P \cap N$。显然N与∂P相交，由N是G-不变的可知，$\tilde{Q}$或包含∂P上的某个循环中的所有点或不含其任何一点。假设$\tilde{Q}$包含(多半是作为一个真子集)$\Delta \cap \partial P$内的顶点的循环$C_1, \cdots, C_t$和$\partial \Delta$上的点$w_1 \cdots, w_n$，且设Q_0是以

$$C_1 \cup \cdots \cup C_t \cup \{ w_1, \cdots, w_n \}$$

为其顶点集的多边形（Q_0是一个凸集的有限个边界点的凸包），由凸性知，$Q_0 \subset Q$。所以，Q_0在其顶点处的内角和不大于Q在其相同点处的内角和。如果循环C_j的长度为l_j，阶为q_j，由7.15节，我们推出

$$\begin{aligned}
\text{h-area}(Q) &\geqslant \text{h-area}(Q_0) \\
&\geqslant \pi(n - l_1 + \cdots + l_t - 2) - 2\pi\left(\frac{1}{q_1} + \cdots + \frac{1}{q_t}\right) \\
&= \pi(n-2) + \pi \sum_j \left(l_j - \frac{2}{q_j}\right)
\end{aligned}$$

为方便起见，在这里采取一种约定，即二阶椭圆不动点和长度为1的循环**不是**顶点。在这种约定下，每个循环C_j要么是偶然循环（$l_j \geqslant 3$，$q_j = 1$），要么是椭圆循环（$l_j q_j \geqslant 3$）。因而在所有情形下，均有

$$l_j - \frac{2}{q_j} \geqslant \frac{l_j}{3} \geqslant \frac{1}{3}$$

所以

$$3n+t<6+(3/\pi)h-\mathrm{area}(Q)$$

这推出仅有P的有限条边（无论在哪种约定下）与$\widetilde{Q}$相交。

现设g_s是P的那些使其对应边与$\widetilde{Q}$相交的边偶映射，可推出这样的g_s仅存在有限个，而且只需证明这些g_s生成G就够了。选取G中的任意一个g，由N的凸性和不变性知，我们能用凸集N中的一条线段σ连接Q中的一个点和$g(Q)$中的另一个点。可设σ与P的任何顶点的任何象点不交，从而σ依次与象集

$$P,\ g_1(P),\ \cdots g_n(P)$$

相交。其中$g=g_n$。由于

$$g_{j+1}(\widetilde{P})\cap g_j(\widetilde{P})\cap N$$

是测地线段，故

$$\widetilde{P}\cap(g_{j+1})^{-1}g_j(\widetilde{P})\cap N$$

也是测地线段（因N是G-不变的），而且$(g_{j+1})^{-1}g_j$是某个g_s。这证明了（2）蕴含（1）。

下面，我们来证明（1）蕴含（3）；（3）蕴含（4）的证明将在下节中给出，这样就完成了定理10.1.2的证明。假设（1）成立，并设D是以原点（我们可以假定它不是G的椭圆不动点）为中心的$Dirichlet$多边形。这部分证明的思想是先证D在$\partial\Delta$上的欧氏边界仅有有限个分集（因而曲面Δ/G也仅有有限个“边缘”）。这允许我们将D表示成

$$D=K\cup D_1\cup\cdots\cup D_n$$

的形式，其中K是Δ的紧子集，每个D_j是Δ的子区域，它在$\partial\Delta$上的边界是连通的。于是只需证明仅有有限条D的边与每个D_j相交就够了，因为这对于紧集K显然是对的。事实上，

对于结论的证明而言，说明D_j在$\partial\Delta$的边界上连通并不是本质的，但这样做使得证明非常容易，并且只会增进对所涉及思想的全面了解。

由于D的边偶元素生成G，因而某一有限生成集（由(1)知是存在的）中的每个元素都是由D的边偶元素组成的有限字。由此得出有限个边偶元素生成G，设它们是g_1，…，g_t。

选取(0,1)中的某一r，使圆盘$\{|z|\leqslant r\}$包含P中由g_1，…，g_t所配对的每条边的弧（具有长度）。置

$$K=\widetilde{D}\cap\{z:\ |z|<r\}$$

（取这种K要比取它的紧闭包更方便些），且设

$$G(K)=\bigcup_{g\in G}g(K)$$

我们看到，对每个j，集合$K\cup g(K)$是连通的（K是凸集），因此，每个集合

$$K\cup g_{j_1}(K)\cup g_{j_1}g_{j_2}(K)\cup\cdots\cup(g_{j_1}\cdots g_{j_q})(K)$$

也是连通的。因为g_i生成G，这意味着$G(K)$是连通的。

我们可选取(0,1)中的r，使圆周$\{|z|=r\}$与D的任何顶点不交，因而它与D的任何边都不相切。故

$$\widetilde{D}\cap\{z:|z|=r\}=\sigma_1\cup\cdots\cup\sigma_s$$

其中σ_j是$\{|z|=r\}$上互不相交的闭弧，除其端点外，它全含于D内。由定理9.4.3可知，所有的σ_j的端点组成的集合也被边偶映射配对。这说明每个σ_j的每一端点是某个$h(\sigma_i)$的端点，h和σ_i由σ_j唯一确定。同样的事实对每个$h(\sigma_i)$和每个σ_i的象子序列也成立。由此推出每个σ_j属于一段由σ_i的象组成的简单弧Γ_j。因为只有有限个σ_i，所以弧Γ_j包含同一σ_i的象，Γ_j的构造唯一性说明Γ_j在G的某一非

平凡元素h_j下是不变的。注意到Γ_j是由在h_j重复作用下的一段紧弧的象组成的。若h_j是椭圆元素（因而是有限阶的），则Γ_j是Δ中的一条Jordan曲线。若h_j是双曲元素，则Γ_j是Δ内以h_j的不动点为端点的横截线。若h_j是抛物元素，则Γ_j是Δ中的一条Jordan闭曲线，其起点（也即终点，它是h_j的不动点）除外。注意到K中的点不能等价于任何σ_j中的任一点，所以$G(K)$不与任何Γ_j相交。

现设D_j是σ_j（D的横截线）与$D-\sigma_j$中不含原点的分集的并，见图10.1.2。显然，在Δ内，Γ_j分割D_j和$G(K)$。

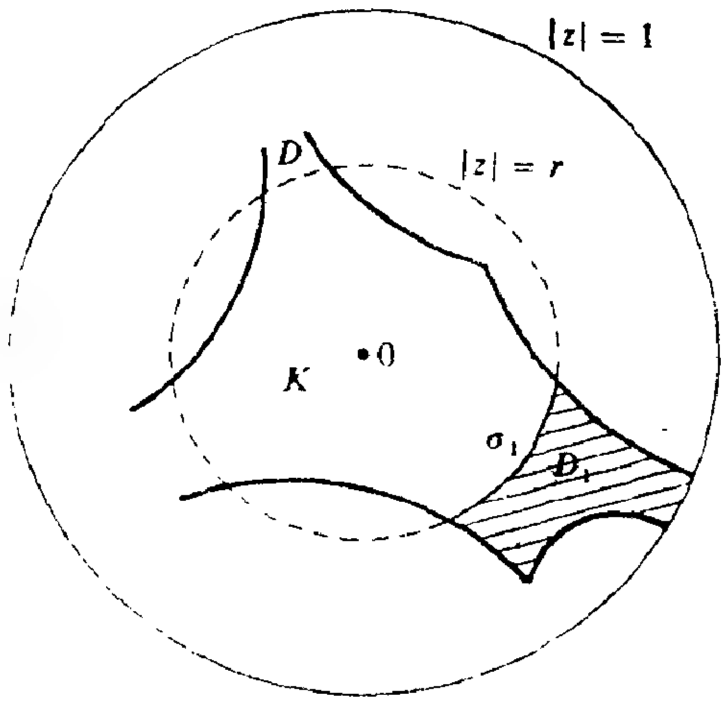


图 10.1.2

容易看出$\overline{D_j}\cap\partial\Delta$是连通的。事实上，若$u$和$v$是这个集合中的不同两点，则径向连接$u$和$ru$（在$\sigma_j$上），然后在$\sigma_j$中连接$ru$和$rv$，最后再径向连接$rv$和$v$。由此构造出一条曲线，我们把这条曲线记为$\tau_j$，它含于$D$内而且与$G(K)$不

交。若h（$\neq I$）属于G，则$h(D)$与τ_j不交，因而它就如$G(K)$一样含于τ_j的同一边上。我们推出图 10.1.3 所示的区域Σ_j与任何$h(D)$，$h\neq I$，都不交，故含于D内，这证明了$\overline{D_j}\cap\partial\Delta$是连通的。

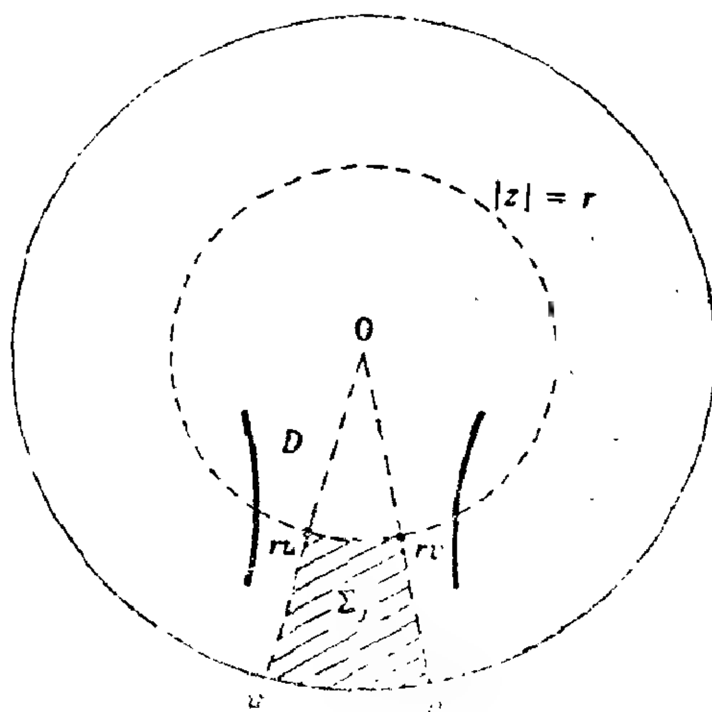


图 10.1.3

现在，对使Γ_j稳定的h_j，我们分类加以讨论，以完成定理的证明。若h_j是椭圆元素，则Γ_j是Δ内的一条*Jordan*曲线，故$\Delta-\Gamma_j$的一个分集在Δ内有紧闭包。如果这一分集是D_j，那么仅有有限条D的边与$\widetilde{D}_j$相交。如果这一分集不是D_j，那么它就包含$G(K)$，从而G是有限的。这样，关于G的*Dirichlet*多边形显然只有有限条边。

设h_j是双曲元素，则Γ_j是Δ的横截线。因$\Delta-\Gamma_j$的一个分集包含$G(K)$（因而也包含原点的轨道），故G的每个极限点均属于这一分集的闭包。$\Delta-\Gamma_j$的另一分集包含D_j，在界

成这分集的$\partial\Delta$的开弧上不存在G的极限点。但D_j含于D内，因而位于等分$[0, h_j 0]$的测地线和等分$[0, (h_j)^{-1} 0]$的测地线之间，这两条测地线把D_j与h_j的不动点分隔开来。我们推出D_j的欧氏闭包含于G的寻常集内。由于D的象的欧氏直径趋于0（9.3节），我们看出$\tilde{D}_j$只能与$\tilde{D}$的有限个象相交，从而也只能与D的有限条边相交。

最后，假设h_j是抛物元素。在这种情况下，$\overline{D_j}\cap\partial\Delta$由一个点组成，即$h_j$的不动点。然而，我们知道$D$的两条边以抛物不动点为端点（定理9.3.8）。所以，在这种情形下也只有D的有限条边与$\tilde{D}_j$相交。

在证实（3）蕴含（4）（这将在10.2节给出）的条件下，我们完成了定理10.1.2的证明。 □

§ 10.2 逼 近 点

考虑一个作用在Δ上的Fuchs群G。设ζ是G的极限点，那么在G中存在互不相同的g_n，使得$g_n(0)$收敛于ζ。$g_n(0)$收敛到ζ的速度有多快（在欧氏意义下）呢？显然

$$|\zeta - g_n(0)| \geqslant 1 - |g_n(0)|$$

并且当g_n是某一双曲元素g（其轴等于Δ的欧氏直径$[-\zeta, \zeta]$）的第n次复合时，等号成立。我们得出最快收敛速度（在相差一个常数的意义下）在

$$|\zeta - g_n(0)| = O(1 - |g_n(0)|), \quad n \to +\infty$$

时达到。由于下列表达式

$$\|g_n\|^2, \quad 2\cosh\rho(0, g_n 0), \quad 2/(1 - |g_n(0)|)$$

当$n\to\infty$时彼此渐近，故最快收敛速度可用双曲形式表示，即

$$|\zeta - g_n(0)| = O(1/\cosh\rho(0, g_n 0))$$

或用矩阵形式表示，即

$$|\zeta - g_n(0)| = O(\| g_n \|^{-2})$$

而且容易看出，我们可用Δ中任一点z来代替最初两个表达式中的原点。在下面的结果中，这一点是毫无疑问的，此结果提供了这种最快收敛速度的另一种解释。

定理10.2.1 若G是作用在Δ上的Fuchs群，ζ是G的极限点，g_1，g_2，…是G中的不同元素，则下列命题等价。

(1) 对Δ内的每个w，有

$$|\zeta - g_n(w)| = O(\| g_n \|^{-2})$$

(2) 对Δ内的每个w及以ζ为端点的每条测地半射线L，有

$$\rho(g_n(w), L) = O(1)$$

(3) 对以ζ为端点的每条测地半射线L，存在Δ的一个紧子集K，使得对所有n，均有

$$(g_n)^{-1}(L) \cap K \neq \phi$$

[证] 一般地，当且仅当$g^{-1}(L)$与紧圆盘$\{z: \rho(z,w) \leqslant m\}$相交时，$\rho(gw, L) \leqslant m$。因而(2)与(3)等价，而且对给定的$L$，(2)正确与否跟$w$的选取无关。进一步地，若$L_1$和$L_2$是以$\zeta$为端点的测地半射线，则对某个$m_1$，有

$$L_2 \subset \{z: \rho(z, L_1) \leqslant m_1\}$$

因而(2)的正确与否也跟L的选取无关。在余下的证明中，以L表示欧氏半径$[0, \zeta)$，而以L'表示欧氏直径$(-\zeta, \zeta)$。注意到若z很靠近ζ，则有$\rho(z, L) = \rho(z, L')$。

先设(1)成立。取$w = 0$，我们得到

$$|\zeta - g_n(0)| = O(1 - |g_n(0)|)$$

这蕴含了$g_n(0)\to\zeta$，故对充分大的n，有

$$\rho(g_n 0, L)=\rho(g_n 0, L')$$

若$z\in\Delta$，则（由7.20节）有

$$\sinh\rho(z,L')=\frac{2|\operatorname{Im}[\bar{\zeta}z]|}{1-|\bar{\zeta}z|^2}$$

$$\leqslant\frac{2|\bar{\zeta}z-1|}{1-|z|^2}$$

$$\leqslant\frac{2|z-\zeta|}{1-|z|}$$

对充分大的n，置$z=g_n(0)$，我们便在$w=0$的情况下得到了（2）。由于（2）与w的选取无关，从而可看出（1）蕴含（2）。

其次，设z属于Δ，且它离ζ要比离$-\zeta$近，若v是从z到L'的欧氏垂线的垂足，则ζ是$\partial\Delta$上最接近v的点，因此

$$\begin{aligned}|z-\zeta|&\leqslant|z-v|+|v-\zeta|\\&\leqslant|z-v|+|v-(z/|z|)|\\&\leqslant2|z-v|+|z-(z/|z|)|\\&\leqslant2|z-v|+(1-|z|)\end{aligned}$$

由于

$$|z-v|=|\operatorname{Im}[\bar{\zeta}z]|$$

故可推出

$$\begin{aligned}\frac{|z-\zeta|}{1-|z|}&\leqslant2\sinh\rho(z,L')+1\\&\leqslant2\sinh\rho(z,L)+1\end{aligned}$$

置$z=g_n(0)$，利用（2），我们发现（2）蕴含$w=0$时的（1）。

最后，若$w\in\Delta$且

$$g(z)=\frac{az+\bar{c}}{cz+\bar{d}},\quad |a|^2-|c|^2=1$$

则由$|a|=\cosh(\rho(0,g0)/2)$，$|c|=\sinh(\rho(0,g0)/2)$，通过直接计算我们可得

$$|g(w)-g(0)|\leqslant\frac{2}{(1-|w|)\cosh\rho(0,g0)}$$

$$=\frac{4}{(1-|w|)\|g\|^2}\qquad(10.2.1)$$

我们已看到（2）即意味着$w=0$时（1）成立，故对一般的w，结合（10.2.1）便得到（1）。

由于对最快收敛速度的不同刻画，采用一些适当的术语往往能够带来方便。

定义10.2.2 称*Fuchs*群G的极限点ζ为G的**逼近点**，如果对Δ内的每个w，在G中存在一列互不相同的g_n使

$$|\zeta-g_n(w)|=O(\|g_n\|^{-2})$$

定理10.2.3 *Fuchs*群G的**逼近点不可能位于G的任何凸基本多边形的边界上**。

〔证〕 假设逼近点ζ位于一个凸基本多边形P的边界上，由凸性知，我们可构造一条位于D内、以ζ为端点的测地半射线L。由定理10.2.1(3)推出，象$(g_n)^{-1}(P)$与一紧子集相交。而这与P是局部有限（参见定义9.3.1）的事实矛盾。 □

例10.2.4 *Fuchs*群G的每个抛物不动点都位于某一*Dirichlet*区域的边界上，故G的抛物不动点不可能是G的逼近

点。

对一个有限生成群，定理10.2.3和例10.2.4给出了G的极限点集的一个完整的描述。

定理10.2.5 当且仅当每个极限点要么是G的抛物不动点，要么是G的逼近点时$Fuchs$群G是有限生成群。

注：我们说极限集Λ可裂，如果它只含G的抛物不动点或逼近点。若G是有限生成群，则存在G的一个边数有限的凸基本多边形（因为在定理10.1.2中，(1)蕴含(3)）。我们将证明这种多边形的存在蕴含了Λ可裂。我们也将证明若Λ可裂，则G的每个凸基本多边形有有限条边，而这蕴含了G是有限生成群（因为在定理10.1.2中，(4)蕴含(1)）。显然，这一推理表明定理10.1.2 (3) 蕴含Λ可裂，因而定理10.1.2 (4) 成立。故在用这种方法证明定理10.2.5时，我们也完成了定理10.1.2的证明。

［证］ 首先设Λ可裂，P是G的任一凸基本多边形。若P有无穷条边，则这些边必在$\partial\Delta$上的某点ζ处凝聚。由于P的象的欧氏直径趋于零，ζ必为∂P上的极限点。由定理10.2.3可知，ζ不可能是G的逼近点，而由定理9.3.8又可推出，ζ不可能是G的抛物不动点（否则P的两条边以ζ为端点）。这与Λ可裂这一事实矛盾，所以P只能有有限条边。

现设P是G的边数有限的凸基本多边形，我们可设P是一个$Dirichlet$多边形（因为定理10.1.2的证明表明，在这一情况下G是有限生成群，故任何$Dirichlet$多边形的边数有限）。且可设（为了简单起见）定理9.4.5中所述的条件满足。经共轭变换，还可设p的中心在原点。

若P的两条边s和s'在$\partial\Delta$上有一个公共端点v，则v是G

的抛物不动点（定理9.4.5），而且v的稳定核是由G中把s映射为s'的一个抛物元素P生成。在v点构造一个开极限圆域，它由极限圆周Q围成。顺便指出，存在Q的一条紧弧q，使得Q是象$p^n(q)$，$n\in Z$的并。

同样的构造对P的自由边也成立。一条自由边的每个端点是某一自由边的某个象的端点。具有间断σ、包含一条已给自由边的区间是P的具有有限条自由边的象的可数并，这些象不交，且只凝聚于σ的端点。由此推出G中的某一h把σ中的一条自由边的一个象映射成另一个也在σ内的这种象，故$h(\sigma)=\sigma$（因为具有间断的区间是由G中的元素置换得到的）。我们推出h以σ的两个端点为不动点，因而它是双曲的。与σ有相同端点的测地线L是h的轴，且可假定h生成L的稳定核。注意到存在L的一段紧子弧l，它使得L是象$h^n(l)$，$n\in Z$的并。

测地线L和极限圆周Q的个数是有限的，且它们把P在$\partial\Delta$上的边界点同$\widetilde{P}$的紧子集P_0分隔开来。记K为由P_0和有限条弧q及l的并组成的紧集。

现设ζ是G的任一极限点但不是抛物不动点，L_0是以ζ为端点的测地半射线。L_0的起点可以映射为$\widetilde{P}$中的一点，且相应的L_0的象不会全属于以上构造的极限圆域或超圆域。否则它分别以G的抛物不动点或G的寻常点为端点。由此推出要么L_0与P_0相交，要么L_0与这些区域之一相交，两者必居其一；在后一情形中，L_0的某一象与弧q或l中之一相交。在这两种情形下，L_0的一个象与K相交，因而存在L_0中某点z_0使（比方说）$g_1(z_0)$属于K。

现设L_n是由L_0除去长度为n的起始一段而得到的射线。

恰如L_0一样，射线L_n包含某点z_n，使得$g_n(z_n)$属于K。显然$z_n \to \zeta$，且$\{g_1, g_2, \cdots\}$为无限集，故由定理10.2.1知ζ是逼近点，从而A可裂。 □

习题 10.2

1. 通过在H^2中讨论，取∞为抛物不动点（利用定理10.2.1(2)），证明例10.2.4.

§ 10.3 共轭类

任何群均可分解为互不相交的共轭类的并。在共轭变换下，共形*Möbius*变换的分类是不变的。因此，可以明确地谈到椭圆、双曲和抛物共轭类。在由所有*Möbius*变换组成的群内，共轭类可通过其元素所共有的tr^2值进行参数化，但我们将看到，这一事实对双曲平面的等距共形群并不正确。

定理10.3.1 在由双曲平面的所有等距映射构成的群内，两个非平凡共形等距映射共轭的充要条件是它们有相同的tr^2值。在由所有共形等距映射构成的群内，tr^2值确定了两个抛物或椭圆共轭类，或一个双曲共轭类。

〔证〕 我们将只对抛物的情形仔细地证明这一结果。使用H^2模型，任何两个抛物等距映射（在共形等距映射群内）共轭于（比方说）$z \mapsto z+p$和$z \mapsto z+q$，其中p和q是非零实数。它们在共形等距映射群内共轭的充要条件是，对某些实数a，b，c，d，$ad-bc=1$，有

$$\frac{a(z+p)+b}{c(z+p)+d}=\frac{az+b}{cz+d}+q$$

置$z=-d/c$,我们发现$cp=0$,故$c=0$且$ap=dq$。因$ad=1$，我们有$a^2p=q$，所以p和q有相同的符号。这证明了在共形群内，tr^2决定了两个抛物共轭类。然而，在由等距映射构成的完全群内，平移$z\mapsto z+1$和$z\mapsto z-1$共轭。事实上，若记α和β分别是关于$x=0$和$x=1/2$的反射，则

$$\beta\alpha=\alpha(\alpha\beta)\alpha$$

故$\alpha\beta$和$\beta\alpha$共轭。

对椭圆的情形可通过使用模型Δ和两个以原点为不动点的旋转作类似的处理。对双曲的情形，可在H^2内通过两个以0和∞为不动点的双曲元素作出最佳的处理。在这一情形中，每个元素都共轭于它们的逆，因为存在一个使0和∞互换的共形等距映射，即$z\mapsto 1/z$。 □

现在我们来仔细研究*Fuchs*群中的共轭类。

定理10.3.2 设G是*Fuchs*群。v_1，v_2，…是位于G的某一凸基本多边形边界上的抛物和椭圆不动点。如果g_j生成v_j的稳定核，那么G的任何椭圆或抛物元素均共轭于某个g_j的某一方幂。

［证］ 若g是以v为不动点的椭圆或抛物元素，则G中的某一个h把v映射到∂P上的某点。所以对某个j，我们有$h(v)=v_j$，从而$hgh^{-1}\in\langle g_j\rangle$。 □

推论10.3.3 若G是有限生成群，则G有有限个最大循环子群$\langle g_1\rangle$，…，$\langle g_n\rangle$，使得G中任何椭圆或抛物元素恰好共轭于这些子群之一的一个元素。

我们仅需考察g是椭圆或抛物元素，g的两个方幂共轭的情形，比方说若

$$hg^{n}h^{-1}=g^{m},$$

则h和g有相同的不动点，所以h本身就是g的方幂，故$n=m$。注意到如果g是抛物元素且以v为不动点，那么h也以v为不动点，因而它不可能是双曲的。

以后，我们将需要关于G的子群G_1中那些最大循环子群的这种共轭类的个数方面的信息，下面的简单结果足以满足我们的需要。

定理10.3.4 设G是Fuchs群，G_1是G中具有指数k的子群。假设G和G_1分别有t和t_1个最大抛物循环子群共轭类。那么$t_1\leqslant kt$。对椭圆元素有同样的结果。

〔证〕 若D是G的一个Dirichlet多边形。在这个多边形内，∂D上的抛物和椭圆不动点的循环长度为1。则恰有t个抛物不动点属于∂D。现对G作陪集分解，如果

$$G=g_1G_1\cup\cdots\cup g_kG_1$$

那么

$$D^{*}=(g_1)^{-1}(\widetilde{D})\cup\cdots\cup(g_k)^{-1}(\widetilde{D})$$

至少包含每个G_1-轨道中的一点。由于D^{*}在其边界上至多有kt个抛物不动点，故$t_1\leqslant kt$。同样的证明对椭圆元素也成立。□

我们现在转向讨论Fuchs群中的双曲元素共轭类。

定理10.3.5 任何非初等Fuchs群都包含着无穷多个最大双曲循环子群共轭类。

〔证〕 若不然，则存在D中的双曲元素h_1，…，h_t使得G内的每个双曲元素都共轭于某个h_j的某一方幂。设u和v是G的不同极限点。由定理5.3.8知，存在具有不同轴A_1，

$A_2, \cdots$的双曲元素$f_1, f_2, \cdots$使得A_n有端点u_n和v_n，其中$u_n \to u$，$v_n \to v$。

因为每个f_n都共轭于有限个h_j之一的某一方幂，所以我们可以重新编号，并通过选取子列，可设每个f_n都共轭于h_1的方幂，即

$$f_n = g_n (h_1)^{n_1} (g_n)^{-1}$$

从而元素

$$q_n = g_n h_1 (g_n)^{-1}$$

具有不同的轴A_n和与h_1相同的平移长度T。因A_n收敛于测地线(u, v)，这与离散性矛盾；更明确地说，如$z \in (u, v)$，则当$n \to +\infty$时

$$\sinh \frac{1}{2} \rho(z, q_n z) = \sinh(\frac{1}{2} T) \cosh \rho(z, A_n)$$

$$\to \sinh(\frac{1}{2} T)$$

但q_n是不相同的。 □

现设Fuchs群G中双曲元素的共轭等价类为$C_1, C_2, \cdots$。每个C_n中的元素有共同的平移长度，设为T_n。

定理10.3.6 如果G是有限生成群，那么当$n \to +\infty$时$T_n \to +\infty$。

［证］ 定理10.2.5及其证明说明了不仅G的每个双曲不动点都是逼近点，而且还存在Δ的一个紧子集K，使得每条双曲轴均有一个与K相交的象。这意味着每个双曲共轭类C_n包含一个元素g_n，它的轴A_n与K相交。取某个d，使

$$K \subset \{ z \in \Delta : \rho(0, z) \leqslant d \}$$

由7.4和7.35节，我们得到

$$
\begin{aligned}
\|g_n\|^2 &= 2\cosh\rho(0,g_n0)\\
&= 2+4\sinh^2\frac{1}{2}\rho(0,g_n0)\\
&= 2+4\sinh^2(\frac{1}{2}T_n)\cosh^2\rho(0,A_n)\\
&\leqslant 2+4\cosh^2(d)\sinh^2(\frac{1}{2}T_n)
\end{aligned}
$$

因此当$n\to+\infty$时$T_n\to+\infty$。 □

注：利用已知的序列收敛信息（例如定理5.3.13），我们还可得到T_n趋于$+\infty$的收敛速度的更精确的信息。

在一个$Fuchs$群中，有两类应特别注意的双曲元素，一类是简单双曲元素（定义8.1.5），另一类是边界双曲元素h，它由下述事实刻画：这些双曲元素使无穷远圆周上某个具有间断的区间保持不变。当然，这些元素仅存在于第二类$Fuchs$群中。

定理10.3.7 一个有限生成$Fuchs$群只可能有有限多个最大边界双曲循环子群共轭类，但可有无穷多个本原简单双曲元素的共轭类。

〔证〕 有限生成群G有一个凸基本多边形P，它只有有限条自由边，比如说是s_1，…，s_n。每条自由边s_j含于一个具有间断σ_j的区间内，σ_j的稳定核由一个边界双曲元素h_j生成。

如果h是任一边界双曲元素，它使某个具有间断σ的区间不变，那么我们就可以构造一条以σ的某一内点为端点且全部含于某一象$f(P)$内的半射线L（因为P的这些象在σ的内点处不凝聚）。由于$f^{-1}(L)$包含于P且以G的一个寻常点为

端点，其端点必位于某一s_j内。故$f(\sigma)=\sigma_j$，因而fhf^{-1}使σ_j不变，这表明h共轭于h_j的某一方幂。

最后，我们要举出一个有限生成Fuchs群的例子，它包含无穷多个非共轭本原简单双曲元素。

在Δ中构造一个以位于无穷远圆周上的点v_1，v_2，v_3，v_4为顶点的四边形P。设f和g是使P的边配对的双曲元素（如图10.3.1所示），根据Poincaré定理（参看习题9.8.2），由f和g生成的群G是离散的，且P是G的基本多边形。因为f

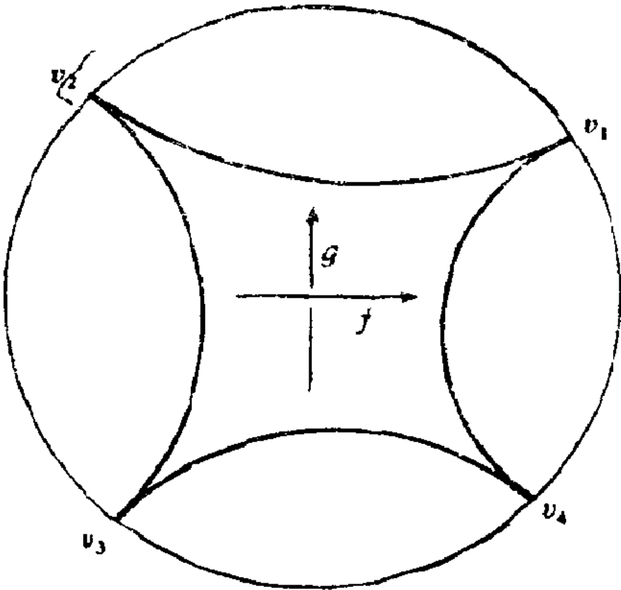


图 10.3.1

和g使一个凸基本多边形的边配对，故它们是G的简单双曲元素（定理9.7.1）。从作用的几何直观来看，显然f和g的轴与P相交。这说明f和g是本原元素。

现设$v_5=f(v_1)$，则以v_1，v_3，v_4，v_5为顶点的四边形也是G的一个凸基本多边形，它的边由f和fg配对（见图10.3.2）。完全仿照上面的推理，推出f和fg是简单本原双

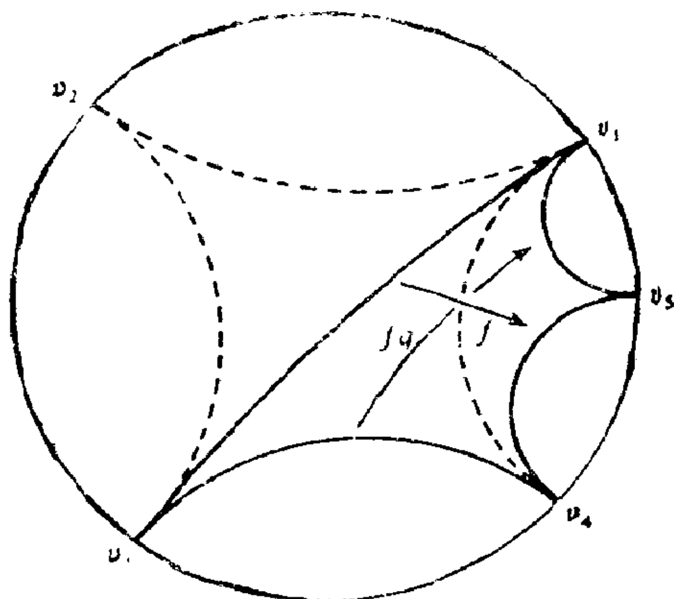


图 10.3.2

曲元素。

重复这一过程，能得到G的本原简单双曲元素序列g，fg，f^2g，…。借助共轭变换，我们可设现在的G作用在H^2上，且

$$f=\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1/u \end{pmatrix}\quad , \quad g=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

其中$u>1$，通过平凡的计算表明当$n\to+\infty$时，$\mathrm{tr}^2(f^n g)\to+\infty$。因此，序列$(f^n g)$包含无穷多个非共轭元素（注意到$a$非零，否则$f$和$g$有一个公共不动点）。 □

习题 10.3

1. 构造一个无限生成$Fuchs$群，它包含无穷多个具有相同平移长度的简单本原双曲元素的共轭类（参看定理10.3.6和10.3.7）。

2. 在定理10.3.7的证明中，试证明书中有关图10.3.1和10.3.2的细节（利用习题9.8.2）。给出一个不同的构造，使顶点v_j被自由边

代替，并直接应用Poincaré定理证明之。

§ 10.4 Fuchs群的符号差

设G是非初等有限生成Fuchs群。G的任何Dirichlet多边形D边数有限，而且在拓扑意义下，$\tilde{D}/G$是某一亏格为g的、具有被挖去的某一数目的洞的紧曲面S。由于Δ/G与$\tilde{D}/G$同胚（定理9.2.4），亏格g不依赖于D的选取。

现在考虑关于G的Nielsen区域和相应的商空间$\tilde{N}/G$，在10.3节中所给的论述说明了N在Δ内的边界由所有的G中边界双曲元素的所有轴组成。设A是一条这样的轴，其稳定核由h生成。取H是$\Delta-A$内不含N的分集。显然H关于$\langle h\rangle$是稳定的，因而H在Δ/G内的投影在拓扑意义下是一个柱面，即$H/\langle h\rangle$（定理6.3.3）。这个柱面的一端是简单闭路$A/\langle h\rangle$；事实上，没有A的象能与A相交（由于作为H的边界的$\partial\Delta$上的开弧仅含G的寻常点），且不存在使A稳定的二阶椭圆元素（否则G仅有两个极限点）。

若把Δ到Δ/G上的自然投影记为π，则我们就可看出$\pi(\Delta)$是$\pi(N)$和形如$\pi(A)$的简单闭路及形如$\pi(H)$的柱面的不相交并。柱面$\pi(H)$越过共同的边界闭路$\pi(A)$与$\pi(N)$连接，这些$\pi(H)$的个数与最大边界双曲循环子群共轭类的个数相同，设有t个。显然，三个空间Δ/G，$\tilde{D}/G$，$\tilde{N}/G$彼此同胚。

另外，G仅含有有限个（比方说s个）最大抛物循环子群共轭类，每个这种共轭类对应于曲面S上的一个孔（考虑一个在循环抛物子群下不变的极限圆域的商）。最后，G仅

含有有限个（比方说r个）最大椭圆循环子群共轭等价类，设其阶数分别为m_1，…，m_r。我们引进一个术语来总结这些事实。

定义10.4.1 称记号

$$(g;\ m_1,\cdots,m_r;\ s;\ t) \tag{10.4.1}$$

为G的*符号差*，其中每个参数是非负整数且$m_j \geq 2$。

若G中无椭圆元素，则简记为$(g;\ 0;\ s;\ t)$。对于会出现何种符号差，我们能够作出明确的表述。

定理10.4.2 *存在非初等有限生成Fuchs群具有符号差*（10.4.1）*和*$m_j \geq 2$*的充要条件是*

$$2g-2+s+t+\sum_{j=1}^{r}\left(1-\frac{1}{m_j}\right)>0 \tag{10.4.2}$$

（10.4.2）式是存在具有符号差（10.4.1）的群之必要条件的证明乃是下面结果的推论。

定理10.4.3 *若G是具有Nielsen区域N和符号差*（10.4.1）*的非初等有限生成Fuchs群，则*

$$\text{h-area}(N/G)=2\pi\left\{2g-2+s+t+\sum_{j=1}^{r}\left(1-\frac{1}{m_j}\right)\right\}$$

若G还是第一类Fuchs群，则$N=\Delta$ 且$t=0$。因而我们可以得到G的基本多边形的一个面积公式。

推论10.4.4 *如果G是第一类有限生成Fuchs群，其符号差为*$(g;\ m_1,\ \cdots m_r;\ s;\ 0)$，*那么对于$G$的任何凸基本多边形$P$，均有*

$$\text{h-area}(P)=2\pi[2g-2+s+\sum_{j=1}^{r}(1-\frac{1}{m_j})]$$

[定理10.4.3的证明] 取D为G的 *Dirichlet* 多边形，其中心为w。则

$$\text{h-area}(D\cap N)=\text{h-area}(N/G)$$

适当选取w，不仅可设∂D上的每个椭圆和抛物循环的长度为1，（通过选取w避开可数条测地线）而且还可设D的顶点循环中没有一个循环位于边界双曲元素的轴上。

显然，只有有限多个双曲轴的不同象能与任何局部有限基本域的闭包相交。由N以双曲轴为边界（因为G是有限生成群）可知，N只有有限多条边与D相交。因而$D\cap N$是边数有限的多边形。设$D\cap N$的边界由$2n$条互相配对的边（它们是P中互相配对的边的弧段）和k条没有配对的边（它们是那些位于D内的围成N的轴的弧段）组成。$D\cap N$的顶点是r个长度为1的椭圆循环，s个长度为1的抛物循环，P的某些偶然循环（比如说有a个）和k个对应于$D\cap N$的k条没有配对边的端点的长度为2的循环。

应用*Euler*公式（把洞"填满"之后），即得

$$2-2g=(1+t)-(n+k)+(r+a+k+s)$$

故

$$n-a=2g-1+r+s+t$$

现在把w和$D\cap N$的每个顶点连接起来，这样，$D\cap N$就被分成了$2n+k$个三角形。把这些三角形的面积加起来，得到

$$\text{h-area}(D\cap N)=(2n+k)\pi-2\pi-2\pi a-\pi k$$

$$-\sum_{j=1}^{r}\frac{2\pi}{m_j}=2\pi\left(n-a-1-\sum_{j=1}^{r}\frac{1}{m_j}\right)$$

$$=2\pi\left[2g-2+s+t+\sum_{j=1}^{r}\left(1-\frac{1}{m_j}\right)\right]$$

□

很显然，由定理10.4.3中公式的性质，可知 $h-\text{area}$ (N/G) 有一个正的一般下界，它对所有群G都有效。

为简洁起见，记

$$A=(1/2\pi)\,\text{h}-\text{area}(N/G)$$

要计算这一下界，可设$A<1/6$；对于下面的分析来说1/6这个数是方便的，而且不久将会看到，存在使$A<1/6$的群。

若$r=0$或对每个$j,m_j=2$，则对某一整数n，$A=n/2$；由$A>0$就会推出$A\geqslant1/2$。故可设$r>0$且某个m_j至少为3，于是

$$1>6A$$

$$\geqslant6\left[2g-2+s+t+\frac{(r-1)}{2}+\frac{2}{3}\right]$$

由此导出

$$4g+4s+2t+r<4$$

因为

$$\begin{aligned}2&<A+2\\&\leqslant2g+s+t+r\\&\leqslant4g+2s+2t+r\\&<4\end{aligned}$$

我们得到

$$2g+s-t+r=3$$

$$= 4g + 2s + 2t + r$$

从而

$$g = s = t = 0, \quad r = 3$$

现在可断言

$$A = 1 - \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3}\right) > 0$$

若每个m_j都至少是3，则有一个m_j至少是4，于是 $A \geqslant 1/12$。若不然，则可设$m_3 = 2$，从而有

$$A = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) > 0$$

若m_1和m_2都至少是4，则有一个至少是5，于是$A \geqslant 1/20$。若不然，则可设$m_2 = 3$，且有

$$A \geqslant \frac{1}{42}$$

其等号当且仅当G的符号差为(0：2，3，7；0；0)时成立。为了便于今后引用，我们把它叙述为下面的结果。

定理10.4.5 对每个具有 $Nielsen$ 区域N 的非初等 $Fuchs$群G，均有

$$\text{h-area}(N/G) \geqslant \frac{\pi}{21}$$

当G的符号差为（0：2，3，7；0；0）时等号恰好成立，在这一情形中，$N = \Delta$。

我们以完成定理10.4.2余下部份的证明来结束这一节。

［定理 10.4.2 的 证 明］ 充分性。已知记号（10.4.1）满足（10.4.2），我们要构造一个以（10.4.1）为符号差的$Fuchs$群G。

对任何正数d，构造一个圆周$\rho(z, 0)=d$和一个有$4g+r+s+t$个点z_j的集合，使此集合均匀地分布在这一圆周上（且以自然的方式编序）。弧z_jz_{j+1}在原点所对的角为2θ，其中

$$\theta = \frac{2\pi}{8g+2r+2s+2t}$$

对这些弧中的最初四条，用如图10.4.1所示的映射h_j构造出一种构形。顺便指出，z_1，…，z_5就是彼此的所有象点。

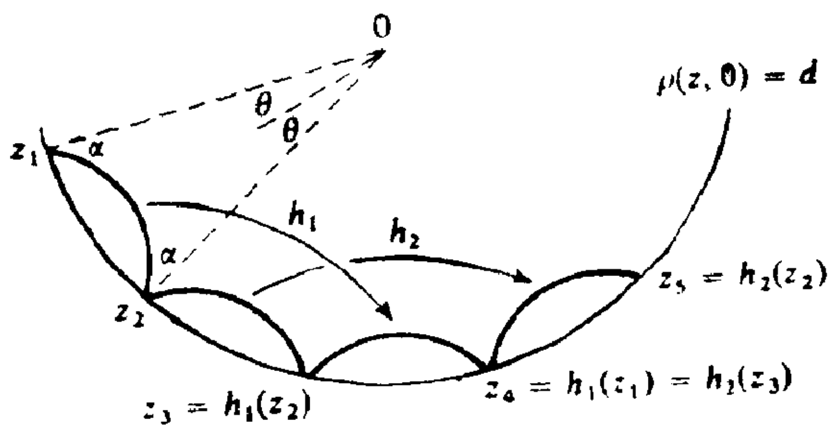


图 10.4.1

从z_5等出发，这种构造重复进行g-1次，就有$4g$条弧z_jz_{j+1}，(在原点张成角$8g\theta$)，以及映射h_1，…，h_{2g}。

利用接下来的r条弧z_jz_{j+1}，用如图10.4.2所示的映射e_i构造构形（回顾一下，整数m_i可从（10.4.1）得到，且$m_i \geqslant 2$）。e_i必是m_i阶的椭圆元素，且以w_j为不动点。这部分构造说明了一个在原点处为$2r\theta$的附加角测度。其次，再把这种构造重复s次，不过在现在的每种情况中，对应的w_j

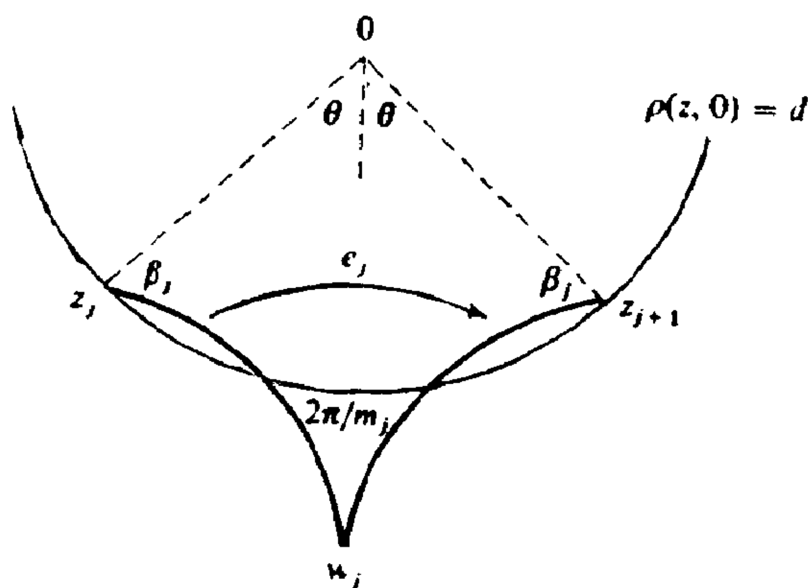


图 10.4.2

在$\{|z|=1\}$上，在w_j处的角为0，相应于e_i的映射p_i是抛物元素。

还剩下t条弧，每条在原点所对的角为2θ。在这些弧中的每一条弧上，构造如图10.4.3所示的构形和双曲映射b_i。

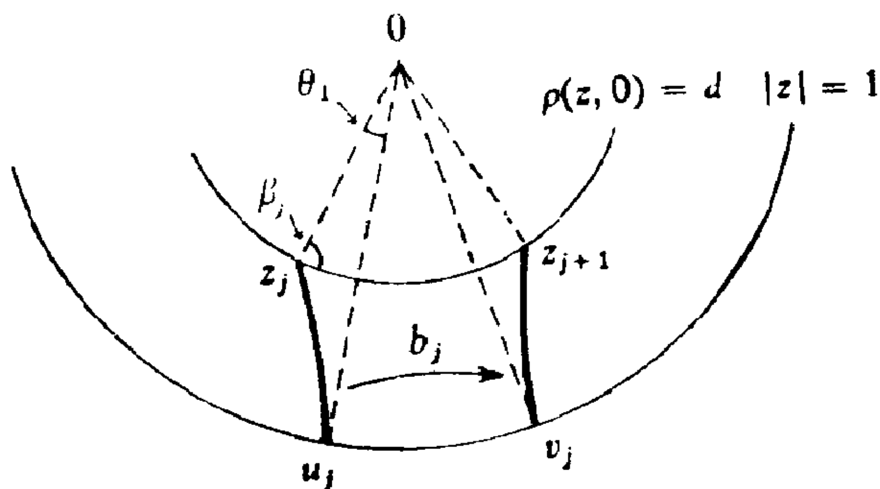


图 10.4.3

其中

$$\theta_1 = \left(\frac{1+d}{1+2d} \right) \theta$$

现已构造出一个以z_j，u_i，v_i，w_i为顶点的多边形，其边偶元素由h_i，e_i，p_i和b_i给出。由这些映射生成的群G可能是离散的，也可能不是。但在任何情形中，点z_1，z_2，…均属于同一G轨道。而且在这些z_j处所对的角之和为

$$\phi(d) = 8g\alpha + 2(\beta_1 + \cdots + \beta_{r+s+t})$$

每个角α，β_j连续依赖于参数d。我们将证明对某一选定的d，有$\phi(d) = 2\pi$。于是，Poincaré定理（参看习题9.8.2）蕴含了G是离散的，而且所构造的多边形是G的一个基本域。因而余下只需证明G的确具有符号差（10.1.1）。

由初等三角学，有（依次应用图10.4.1，10.4.2和10.4.3）

(i) $\cosh d = \cot\theta \cot\alpha$

(ii) $\cosh d = \dfrac{\cos\theta \cos\beta_j + \cos(\pi/m_j)}{\sin\theta \sin\beta_j}$

其中$j = 1, \cdots, r$。并且当$j = r+1, \cdots, r+s$时有同样的表达式，但此时的$\cos(\pi/m_j)$要由1代替；

(iii) $\cosh d = \dfrac{\cos\theta_1 \cos\beta_j + 1}{\sin\theta_1 \sin\beta_j}$

注意到当$d \to 0$时，$\alpha \to \pi/2 - \theta$。因在（ii）中有

$$\cos(\theta + \beta_j) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{m_j}\right) + \sin\theta \sin\beta_j (\cosh d - 1)$$

故当$d \to 0$时，有

$$\beta_j \to \pi - \frac{\pi}{m_j} - \theta$$

但在$r < j \leqslant r + s$时，需要对$m_j = +\infty$作适当解释。在(iii)中有

$$\theta + \beta_j \to \pi$$

所以

$$\beta_j \to \pi - \theta$$

由此推出当$d \to 0$时，有

$$\phi(d) \to 2\pi\left[2g - 2 + s + t + \sum_{j=1}^{r}\left(1 - \frac{1}{m_j}\right)\right] + 2\pi$$
$$> 2\pi$$

当$d \to +\infty$时，角α和β_j都趋于0（注意到$\theta_1 \to \theta/2$），因而在这一情形中$\phi(d) \to 0$。从而推出对某个适当选定的d有$\phi(d) = 2\pi$，故G是离散的。

显然G既含有阶数为m_1，…，m_r的椭圆元素，也含有s个抛物元素和t个边界元素，而且这些元素并不代表同一共轭类（最根本的是因为它们使基本多边形的相邻边配对）。若Δ/G具有亏格g^*，则把Euler公式应用于与之等同的多边形，有

$$2 - 2g^* - s - t = 1 - (2g + r + s + t) + (1 + r)$$

因而$g^* = g$，这正是所期望的结果。 □

习题 10.4

1. 设G是非初等Fuchs群，G中的一个抛物元素g生成它的不动点v的稳定核，试通过考虑一个适当的基于v点的极限圆域H，证明$\pi(H)$共形等价于Δ/G中的一个穿孔圆盘。

2．试证明：存在一个正常数δ，使得如果P是某一非初等$Fuchs$群G的任一凸基本多边形，那么$P\cap N$包含一个半径至少是δ的圆盘。并求出δ的一个明确估计。

3．设P是H^2中以-1，0，1，∞为顶点的双曲四边形。试证明P是群G的一个基本域，其中G由

$$g(z)=z+2,\quad h(z)=z/(2z+1)$$

生成。计算G的符号差，并就这一情形详细证明H^2/G的面积公式。求出G在模群中的指数（这是$Selberg$引理中的一种特殊情形）。

§ 10.5 基本多边形的边数

在这一节中，我们把讨论限制在第一类有限生成$Fuchs$群G内。在这种情况下，能删去符号差（10.4.1）的最后一个参数，且可把抛物元素视为阶是$m_j=+\infty$的椭圆元素。这样就能把符号差缩短为（g：m_1，…，m_n）；若G中没有椭圆或抛物元素，则可缩短为（g：0）。

定理 10.5.1 设G是第一类有限生成$Fuchs$群，P是G的任一凸基本多边形。假设P有N条边（其中每条边都不与自身配对）。

（i）若G具有符号差(g：m_1，…，m_n)（可能$n=0$），则

$$N\leqslant 12g+4n-6$$

这一上界由以w为中心的$Dirichlet$区域达到（对几乎所有选定的w均如此）。

（ii）若G具有符号差（g：0），则$N\geqslant 4g$，且这一下界由某个P达到。

（iii）若G有符号差（g：m_1，…，m_n），$n>0$，则

$$N \geqslant 4g + 2n - 2$$

且这一下界由某个P达到。

［证］ 设P含有椭圆或抛物循环C_1, …, C_n和偶然循环C_{n+1} , …, C_{n+A}。两个循环集合可能只出现一个（且必有一个出现）。通常以$|C|$表示循环C内点的个数。

于是

$$|C_j| \geqslant 1, \qquad 若 1 \leqslant j \leqslant n;$$

$$|C_j| \geqslant 3, \qquad 若 n < j \leqslant n + A$$

且

$$N = \sum_{j=1}^{n+A} |C_j|$$

所以

$$0 \leqslant A \leqslant (N - n)/3$$

由*Euler*公式得

$$2 - 2g = 1 - (N/2) + n + A \tag{10.5.1}$$

消去A，便得到不等式（i）和（iii）。置$n = 0$，并注意到$n = 0$时有$A \geqslant 1$，由（10.5.1）便得（ii）中的不等式。

因多边形P有N条边，故有N个顶点。由于对几乎所有选定的w，以w为中心的*Dirichlet*区域有$|C_j| = 1, 1 \leqslant j \leqslant n$和$|C_j| = 3$，$j > n$。故

$$3A = N - n$$

因此（i）中的等式成立。定理10.4.2（充分性）的证明说明了（ii）中的下界$4g$是可达的。最后，同一证明中类似的讨论说明了（iii）中的下界也是可达的；简言之，不仅可构造一个多边形，使其符号差为（g; m_1, …, m_{n-1}），而且

还可找到一个d值使得$\phi(d)=2\pi/m_*$。 □

在下一节中，我们将研究三角群，即具有符号差（0：p，q，r）的群，其中（必然地）

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}<1$$

注意到对几乎所有选定的中心w，对应的Dirichlet区域有6条边；但关于这种群的通常多边形是四边形，在某种意义上，这是一种例外的情形。

§ 10.6 三 角 群

这一节专门研究一类重要的Fuchs群，称之为三角群。粗略地说，三角群是具有挤得较紧的轨道和最小基本域的离散群。先建立一个未涉及离散性的几何定义。

定义10.6.1 称由双曲平面上的等距映射构成的群G为具有型$(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$，当且仅当$G$是由关于某个具有角$\alpha,\beta,\gamma$的三角形的边的反射生成。

当然，当且仅当α，β和γ非负且满足

$$0\leqslant\alpha+\beta+r<\pi$$

时，这种群才存在。任何两个这样的群，如果型相同，那么它们在由所有等距映射构成的群中互相共轭（因为角度相同的两个双曲三角形全等），而且三元组$(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$中$\alpha$、$\beta$和$\gamma$的顺序是无关紧要的。

下面的例子说明这样的一个群（甚至是离散的）具有的型可能不止一个。

例10.6.2 设T_1和T_2是如图10.6.1所示的两个三角形，

相应的群是

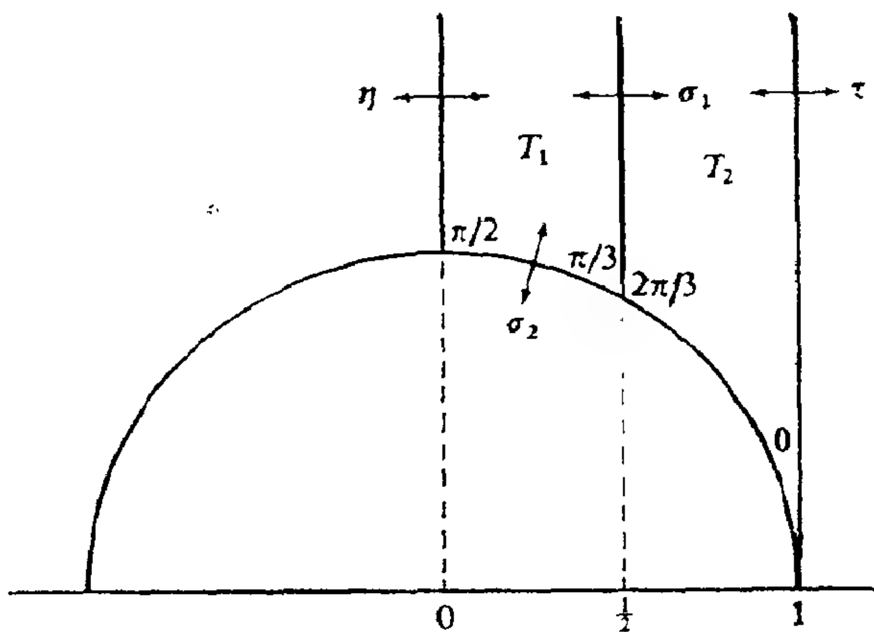


图 10.6.1

$$G_1 = \langle\sigma_1, \sigma_2, \eta\rangle$$

它具有型（0，π/2，π/3），以及

$$G_2 = \langle\sigma_1, \sigma_2, \tau\rangle$$

它具有型（0，0，2π/3）。其中η，σ_1和τ分别是关于直线$x = 0$，$x = 1/2$和$x = 1$的反射，而σ_2是关于$|z| = 1$的反射。

显然

$$\eta\sigma_1 = \sigma_1\tau$$

所以$\eta \in G_2$且$\tau \in G_1$，故$G_1 = G_2$。事实上，由这个群中的共形等距映射构成的群是模群，因而G_1本身是离散的。

注意到

$$\text{h-area}(T_2) = 2\,\text{h-area}(T_1)$$

而有结论：T_2不是G_2的基本域。 □

在每个具有型（α，β，γ）的群G中，有一个在G中指

数为2的正规子群G_0，即由G的共形元素组成的子群；称G_0为具有型(α, β, γ)的共形群。若记σ_1，σ_2和σ_3为生成G的反射，则G_0的元素恰好是用σ_i组成的长度为偶数的字，且G_0由（比方说）$\sigma_1\sigma_2$和$\sigma_3\sigma_2$生成，这是因为

$$\sigma_i\sigma_j=(\sigma_j\sigma_i)^{-1}, \quad \sigma_1\sigma_3=(\sigma_1\sigma_2)(\sigma_3\sigma_2)^{-1}$$

如果γ是三角形中顶点v_3处的角，v_3所对的边在反射σ_3作用下不变，那么$\sigma_1\sigma_2$以v_3为不动点；而且若$\gamma=0$，则$\sigma_1\sigma_2$是抛物元素，若$\gamma>0$，则$\sigma_1\sigma_2$是具有旋转角2γ的椭圆元素。因此，G_0由一对共形等距映射f，g生成，f和g都是椭圆或抛物元素。把抛物元素看成无穷阶椭圆元素往往可以带来很多的方便，在下面的讨论中，将不时地采用这一约定。

如果具有型(α, β, γ)的群G（或其相应的共形子群G_0）是离散的，那么G_0中的每个椭圆元素是有限阶的。所以，若α，β，γ中的每一个都大于零，则它们必具有

$$k\pi/p, \quad (k, p)=1 \qquad (10.6.1)$$

的形式（k和p是互素的整数）。这是关于离散性的一个必要条件，但不是充分的。事实上，容易看出，若α，β和γ都大于零，则在G作用下，三角形T的象覆盖双曲平面。据此，我们推出若G是离散的，则T的两个不交象必包含G_0的一个基本域，所以（由定理10.4.5）

$$\text{h-area}(T)\geqslant\pi/42$$

由此推出，若α, β和γ具有（10.6.1）的形式，且

$$\pi-(\alpha+\beta+\gamma)<\pi/42$$

（这样的角显然存在），则G_0不是离散的。

关于离散性的一个充分条件是，α，β和γ具有形式（p是整数）

$$\pi/p,\ 2\leqslant p\leqslant +\infty \tag{10.6.2}$$

事实上，若这一条件成立，则直接应用*Poincaré*定理可得G是离散的。然而，这个充分条件不是必要的。例如在例10.6.2中，G_2具有型$(0,\ 0,\ 2\pi/3)$，但它却是离散的。

(10.6.1)和(10.6.2)之间的差异是很容易分辨出来的、一个具有型$(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$的群离散的充要条件是，它也具有某一（可能不同的）型$(\pi/p,\ \pi/q,\ \pi/r)$。例如例10.6.2中的G_2就具有型$(0,\ \pi/2,\ \pi/3)$。这一结果稍后将在本节中得到证明。

我们将把注意力限制在离散共形群上，并采用如下标准术语。

定义10.6.3 称群G是一个$(p,\ q,\ r)$-三角群，当且仅当G是一个具有型$(\pi/p,\ \pi/q,\ \pi/r)$的共形群，称G是三角群。当且仅当对某些整数p,q和r，G是一个$(p,\ q、r)$-三角群。

从有关(10.6.2)的附注中可以看到，三角群必是离散的。于是引出两个关于三角群的结果。

定理10.6.4 一个群G是$(p,\ q,\ r)$-三角群的充要条件是，它是具有符号差$(0:\ p,\ q,\ r)$的第一类离散群。

定理10.6.5 设G是由双曲平面上的共形等距映射构成的离散群，如果G包含一个作为其子群的三角群G_0，那么G本身也是三角群。

[**定理10.6.4的证明**] 先设G是一个$(p,\ q,\ r)$三角群，则G是离散群G^*内指数为2的共形子群，G^*是由关于某个具有角$\pi/p,\ \pi/q,\ \pi/r$的三角形T^*的三条边的反射$\sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_3$生成的群。*Poincaré*定理表明，$T^*$是$G^*$的一个

基本域，所以

$$T = T^* \cup \sigma_1(T^*)$$

是G的一个基本域。故G显然是第一类的。

等距映射

$$g = \sigma_1\sigma_2, \quad h = \sigma_1\sigma_3$$

生成G，且

$$g^r = h^q = (h^{-1}g)^p = I$$

参看图10.6,2。在g的迭代作用下，v_3的一个相对于T的邻

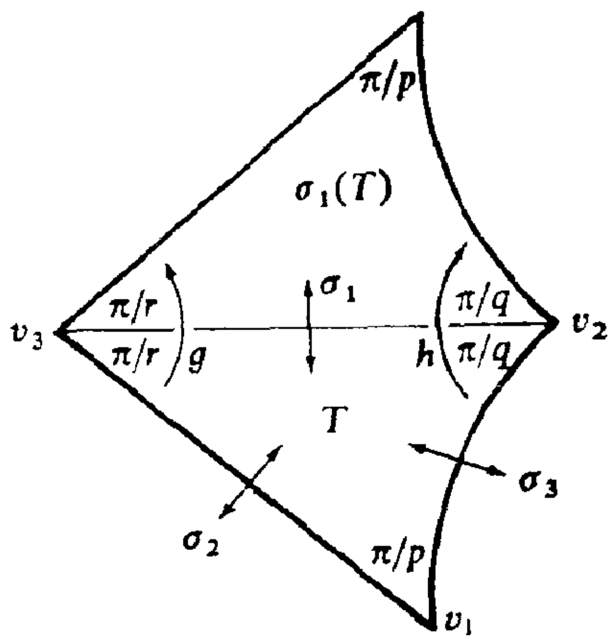


图 10.6.2

域的象镶成v_3的一个平面邻域，所以，由T是基本域可推出，v_1和v_2都不是v_3的象。这说明了g不共轭于h或$h^{-1}g$的任何幂。于是由对称性知，G有三个椭圆或抛物子群共轭类，它们分别以$\langle g\rangle$，$\langle h\rangle$和$\langle h^{-1}g\rangle$为代表。

由Euler公式可求出Δ/G的亏格k，即

$$2-2k = (\text{面数}) - (\text{棱数}) + (\text{顶点数})$$

$= 1 - 2 + 3$

所于G具有符号差（0：p，q，r）。除此之外，应用T的面积公式也能证明$k=0$。

现设G是由共形等距映射构成的离散群，它具有符号差（0：p，q，r），D是G的一个凸基本多边形，它含有长度为N_p，N_q和N_r的循环，这些循环对应于关于p，q和r的共轭类。还假设有t个长度为M_1，…，M_t的偶然循环，所以$M_j \geqslant 3$。显然，由于G是第一类的，D没有自由边。

在D中任选一点w，连接w和D的每个顶点。列出面积方程，得到

$$
\begin{aligned}
&2\pi\left[1-\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}\right)\right] \\
&= \mathrm{h-area}(D) \\
&= [N_p + N_q + N_r + M_1 + \cdots + M_t]\pi - 2\pi - 2\pi t \\
&\quad - 2\pi\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}\right)
\end{aligned}
$$

所以

$$1 = (N_p - 1) + (N_q - 1) + (N_r - 1) + \sum_{j=1}^{t}(M_j - 2)$$

由于右边$t+3$项中每一项都是非负整数，故只能出现两种情况，即

情况1 $N_p = N_q = N_r = 1$；$t = 1$，$M_1 = 3$；或

情况2 N_p，N_q，N_r（按某种顺序）是1，1，2，且不存在偶然循环。

在情况2中，D有四个顶点，因而是四边形。若假设$N_q = N_r = 1$，则可看出D如图10.6.3所示。

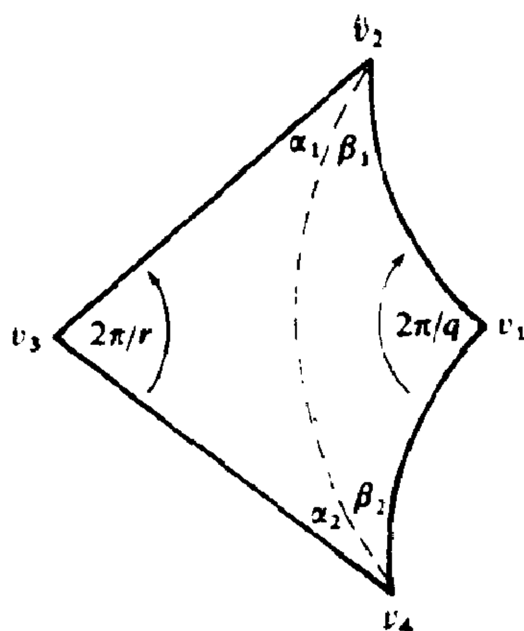


图 10.6.3

对应于N_q（=1）的循环是｛v_1｝，所以，以v_1为端点的两条边被配对。故

$$\rho(v_1, v_4) = \rho(v_1, v_2)$$

因而$\beta_1 = \beta_2$。类似地有$\alpha_1 = \alpha_2$，所以

$$\alpha_1 + \beta_1 = \alpha_2 + \beta_2$$

$$= \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2)$$

$$= \pi/p$$

等腰三角形的性质保证了线段〔v_1，v_3〕是四边形的一条对称线，所以在这种情形中，G是共形三角群，它所关联的群是由关于以v_1，v_2，v_3为顶点的三角形各边的反射生成的群。

在情况1中，D是以椭圆（或抛物）顶点v_1，v_2，v_3和唯一的偶然循环｛a_1，a_2，a_3｝为顶点的一个六边形。其边偶必如图10.6.4所示，其中已把D细分成区域Q、T_1和T_2。由

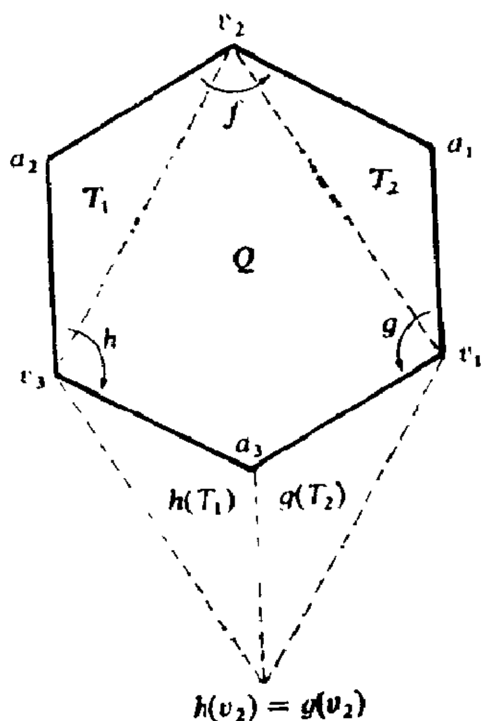


图 10.6.4

$$h(a_2)=gf(a_2)$$

可看出$h=gf$（a_2不是椭圆或抛物不动点）。于是易知$Q\cup h(T_1)\cup g(T_2)$是以v_1，v_2，v_3，$h(v_2)(=g(v_2))$为顶点的基本四边形，而且使情况1化成了情况2。 □

顺便指出，这一证明说明了关于三角群的凸基本多边形必是四边形或六边形；读者应当回顾一下10.5节末端的附注。

［定理10.6.5的证明］ 考虑到定理10.6.4，我们完全可以使用G和G_0的符号差。由

$$0<\mathrm{h-area}(\Delta/G)\leqslant \mathrm{h-area}(\Delta/G_0)\leqslant 2\pi$$

可看出G_0在G中具有某个有限指数k（定理9.1.3）。$k=1$的情形是平凡的，所以可设$k\geqslant 2$。因此

$$\begin{aligned}\mathrm{h-area}(\Delta/G_0)&=k\,\mathrm{h-area}(\Delta/G) \qquad (10.6.3)\\&\geqslant 2\,\mathrm{h-area}(\Delta/G)\end{aligned}$$

根据定理10.6.4，G_0具有符号差（0：p，q，r）。设$\hat{G}$具有符号差（g：t_1，…，t_n），则由面积公式（推论10.4.4）得

$$1-\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}\right)=k\left[2g-2+\sum_{j=1}^{n}\left(1-\frac{1}{t_j}\right)\right]$$
$$>0$$

左边最多是1，所以$g=0$或1。若$g=1$，则$n\geqslant 1$（否则面积为0），且（由于$t_j\geqslant 2$，$k\geqslant 2$）有

$$1\leqslant\frac{nk}{2}\leqslant k\sum_{j=1}^{n}\left(1-\frac{1}{t_j}\right)$$
$$\leqslant 1-\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}\right)$$
$$\leqslant 1$$

然而这是不可能的；因为否则等式自始至终都成立，以至于G_0包含抛物元素（因有$p=q=r=+\infty$），但G却不含抛物元素（因$t_1=t_2=\cdots=t_n=2$）。

由此推出$g=0$且（对正面积）$n\geqslant 3$。于是

$$k\left(\frac{1}{2}n-2\right)\leqslant k\left[\sum_{j=1}^{n}\left(1-\frac{1}{t_j}\right)-2\right]$$
$$=1-\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}\right)$$
$$\leqslant 1$$

因为$k\geqslant 2$，我们得到$n\leqslant 5$。若$n=5$，则$k=2$且等式又都成立，这已被上面排除。故$n=3$或4。若$n=3$，则G具有符号差（0：t_1，t_2，t_3），因而是三角群。余下只要排除$g=0$，

$n=4$的情形。

假设$g=0$且$n=4$。可设$r\leqslant q\leqslant p$且$p\leqslant t_4$（因G_0包含一个阶为p的元素，故G也含有此元素）。则

$$1-\frac{3}{p}\geqslant 1-\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}\right)$$

$$=k\left[\sum_{j=1}^{H}\left(1-\frac{1}{t_j}\right)-2\right]$$

$$\geqslant 2\left[\frac{3}{2}+\left(1-\frac{1}{p}\right)-2\right]$$

$$=1-\frac{2}{p}$$

这也是不可能的，除非$p=\infty$；但在$p=\infty$的情形下，等式都成立，所以$k=2$且G_0和G的符号差分别是

$$(0;\ \infty,\ \infty,\ \infty),\quad (0;\ 2,\ 2,\ 2,\ \infty)$$

然而由定理10.3.4知，这已被排除。 □

最后，我们把注意力放在任意型$(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$的共形群上。已知这些群由椭圆或抛物元素$g$和$h$生成，$g$和$h$使一个具有对称线的四边形的边配对，如图10.6.5所示。反之，给定这样一种构形，很显然$\langle g,\ h\rangle$是具有型（α，β，γ）的共形群。注意到关于（v_1，v_3）的反射使v_2和v_4互换，而有结论（v_2，v_4）与（v_1，v_3）正交。

定理10.6.6 具有某个型（α，β，γ）的共形群离散的充分必要条件是，它是一个三角群。

〔证〕 由定义可知，三角群是具有某个型（α，β，γ）的离散共形群。现设G为具有某个型（α，β，γ）的离散共

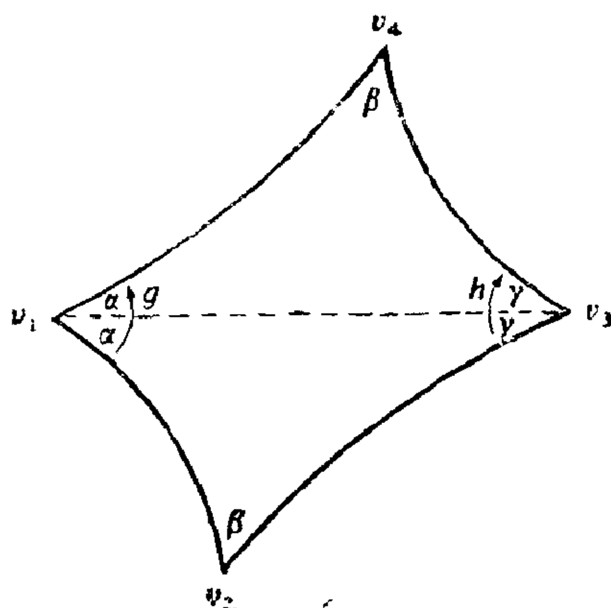


图 10.6.5

形群，由定理10.6.5推出，只需构造一个三角群，它作为G的子群出现即可。参考图10.6.5，有三种情况要考虑。

情况1 g和h都是椭圆元素。

因G是离散群，g和h都是有限阶元素，设g和h的阶分别为p和q。则在$\langle g\rangle$中存在具有旋转角$2\pi/p$的某个g_1，在$\langle h\rangle$中存在具有旋转角$2\pi/q$的某个h_1。在G中取g_1的共轭元素g_2和h_1的共轭元素h_2，使得g_2的不动点u与h_2的不动点v既互不相同，又尽可能地接近。由于v_3的象不以v_1为聚点，这是可以做到的。

现在从$[u, v]$的两端引测地线与之交成角π/p和π/q，构成一个四边形，如图10.6.6所示。这些测地线必在某点x和y处相交（交点可能在无穷远圆周上），因为否则有（由7.10节）

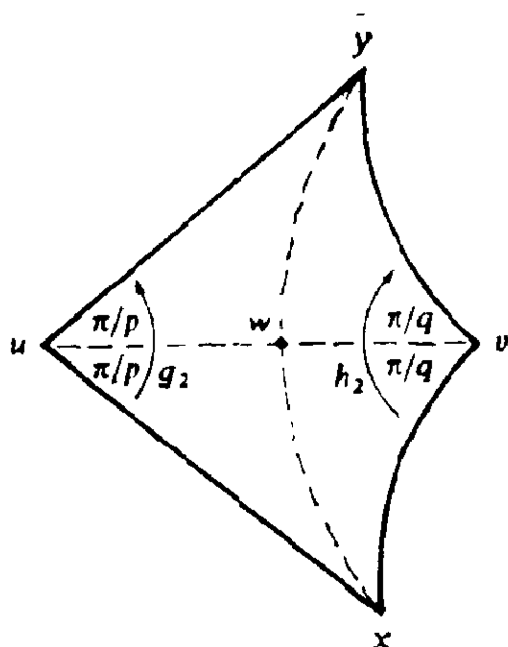


图 10.6.6

$$\cosh\rho(u,v) > \frac{1+\cos(\pi/p)\cos(\pi/q)}{\sin(\pi/p)\sin(\pi/q)}$$

$$\geqslant \frac{1+\cos\alpha\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\gamma}$$

$$\geqslant \frac{\cos\beta+\cos\alpha\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\gamma}$$

$$=\cosh\rho(v_1,v_3)$$

这与u和v的选取相矛盾。此外，如前面已提到过的，(x, y)与(u, v)正交。

注意到

$$f=(g_2)^{-1}h_2$$

以x为不动点，并且是关于$[x,v]$的反射$\sigma_{x,v}$与关于$[x,u]$的反射$\sigma_{x,u}$的复合(事实上$f=(\sigma_{u,v}\sigma_{u,x})^{-1}(\sigma_{u,v}\sigma_{x,v})$)，而有结论：若$x$在无穷远圆周上，则$f$是抛物元素，而且$\langle g_2$，

$h_2\rangle$ 是一个（p，q，∞）-三角群；若 x 是一个有限点，则f是有限阶椭圆元素，从而在x处的角具有$k\pi/r$的形式，其中（k，r）$=1$（而且f是转角为$2\pi k/r$的一个旋转）。于是存在某个环绕x点，转角为$2\pi/r$的反时针方向旋转f_2。若$k\geqslant 3$，则$f_2(v)$ 更接近于u，但它不是u。这就与u和v的选取矛盾，故$k=1$或2。若$k=1$，则在x处的角为π/r，而且$\langle g_2, h_2\rangle$是一个（p，q，r）-三角群。若$k=2$，则

$$f_2=\sigma_{x,w}\sigma_{x,v}$$

从而$\langle h_2, f_2\rangle$是G中的一个（2，q，r）-三角群，它关联着一个顶点为x，v，w的三角形。这就在情况1下完成了证明。

情况2　g是椭圆元素而h是抛物元素。在H^2中讨论之，且假设h以∞为不动点。因连接g和h的不动点的直线必是四边形的一条对称线，所以这一情形如图10.6.7所示。

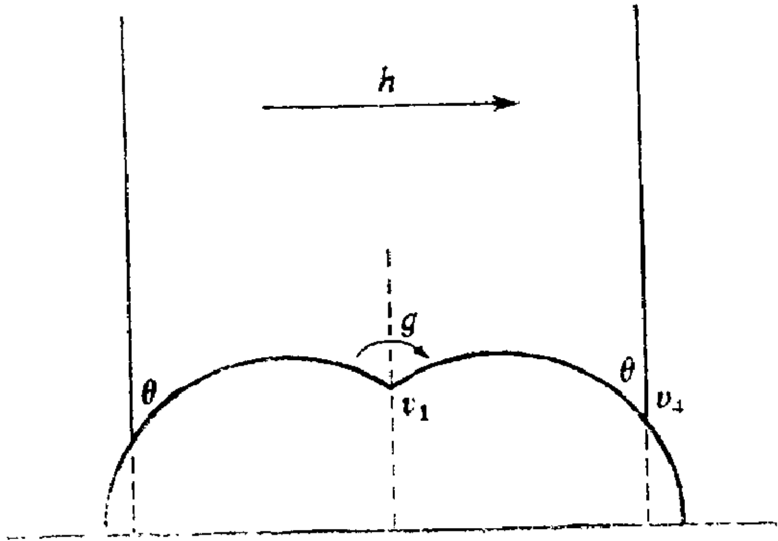


图　10.6.7

v_1的轨道包含了一些最高的点（h是以∞为不动点的抛物元素，这实质上是$Jorgensen$不等式），而且这一对称

构形可通过用v_1的一个最高象点代替v，用环绕该点转角为$2\pi/p$的旋转代替g来完成，其中p是元素g的阶数。由于原来在v_1处的角不少于$2\pi/p$，所以新图形给出的四边形恰如图10.6.7所示。不过，我们现在可假设v_1是其轨道中的最高点，并且在v_1处的角为$2\pi/p$。

若$\theta=0$，则$\langle g, h\rangle$是一个(p, ∞, ∞)-三角群。若$\theta>0$，则对某两个互素的k和r，$\theta=k\pi/r$。若$k\geq 2$，则存在G中的一个环绕点v_4其转角为$2\pi/r$的旋转f，且$f(v_1)$有比v_1大的虚部。然而这是不可能的。故$k=1$且$\langle g, h\rangle$是G中的一个(p, r, ∞)-三角群。

情况3　g和h是抛物元素。

在H^2内讨论之，且设g以0为不动点，h以∞为不动点，这一情形如图10.6.8所示。若$\theta=0$，则$\langle g, h\rangle$是一个(∞, ∞, ∞)-三角群。若$\theta>0$，则可构造一个群$\langle f, h\rangle$，其

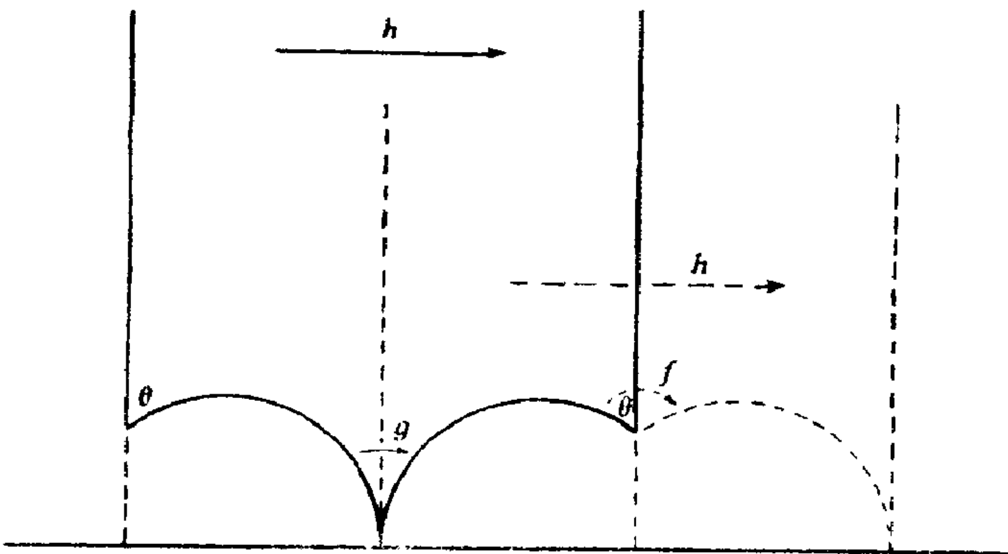


图　10.6.8

中$f=hg^{-1}$是椭圆元素，这就把情况3化成了情况2。 □

习题 10.6

1．试证明：如果G是作用在Δ上的Fuchs群，且h-area$(\Delta/G)<\pi/3$，那么G是一个三角群，并且上界$\pi/3$不能再改进。

2．试证明：如果G是具有某一型(α,β,γ)的共形离散群，那么它恰具有一种型$(\pi/p,\ \pi/q,\ \pi/r)$。

3．构造Hecke群H_q（$q=3,\ 4,\ \cdots$）的具有符号差$(0;\ 2,\ q,\ \infty)$的一个基本四边形，并证明H_q由一个抛物元素g和一个二阶椭圆元素h生成。

4．设v_1，v_2，v_3，v_4是以这种次序位于圆周$\{|z|=1\}$上的不同四点，g和h是抛物元素，满足

$$g(v_1)=v_1,\quad g(v_2)=v_4,\quad h(v_3)=v_3,\quad h(v_4)=v_2$$

试证明$g^{-1}h$是抛物元素的充要条件是交比$[v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4]$取一个特殊值。$G=\langle g,\ h\rangle$是离散的吗？无论如何，这个四边形不是G的基本域，除非$g^{-1}h$是抛物元素。

§10.7 注 记

关于有限条边多边形的信息，可参看〔9〕,〔10〕,〔34〕,〔35〕,〔38〕,〔46〕,〔58〕,〔76〕。逼近点曾被Hedlund所研究（参看〔51〕,181页）,也可参看〔8〕和〔109〕。关于共轭类和子群的结果，可查阅〔49〕和〔97〕。关于对三角群的讨论，参看〔48〕（讨论具有形如$\pi a/b$的角）和〔65〕。

第十一章

Fuchs群上的万有约束

§ 11.1 离散的一致性

本章讨论Fuchs群所显示的一致离散性。由于在初等群类中找不到任何一致性，这一类群必须被认为是例外的。就某些方面来说，把三角群也作为例外群是适当的。通常，关于一致离散性的精确的定量表达式对于三角群表现为一种依赖于符号差的特殊形式，而对于所有非初等非三角离散群则表现为与符号差无关的另一种确定的形式。因此，人们之所以把三角群作为例外情形是由于一致性的性质而不是其存在性。

我们将讨论一致性的下列几个方面。

(1) 基本多边形顶点循环的分布。对顶点循环的几何约束是什么？关于偶然循环能说些什么？

(2) 等距映射群上的几何约束。例如，一个离散群中的两个椭圆不动点能有多近？对双曲元素的平移长度有何约束？

(3) 典型域的位置。典型域是在7.37节中定义的，该定义不依赖于离散性。加上离散性条件之后能说些什么？对于商空间，这又意味着什么？

(4) 位移函数$\rho(z, gz)$。这在以前已讨论过（例如参看定理8.3.1）。若出现椭圆元素，又能说些什么？

（5）相应矩阵群上的约束。这方面的一个典型例子是 *Jorgensen*不等式。

这里列出的结果并不构成对离散一致性的完整的全面的描述。然而，从几何的观点来说它们表明了这些结果为什么必定存在，并且为这一类型的进一步结果提供了参考。

概括地说，在这里我们的做法是应用简单的几何思想来得到一般的约束；对某些（相对来说常是极少数）三角群，这些方法可能会失效。对这些群，要求读者提供独特的计算结果。

§ 11.2　关于顶点循环的通用不等式

在这里将建立一批一般约束，它们必被*Fuchs*群的基本多边形边界上的椭圆顶点的循环或甚至偶然顶点的循环所满足。

首先，考虑一个作用在H^2上的*Fuchs*群G，其中$g(z)=z+1$属于G且生成∞的稳定核。在这种情况下，我们可构造一个基本域（就如在9.6节中那样），即在所有等距圆周的外部而位于任一宽度为1的带域内部的区域。注意到在此情形下，每个顶点循环必位于某个极限圆周$\mathrm{Im}[z]=\mathrm{const}$上。

适当选择垂直带域$x_0<x<x_0+1$，我们可设顶点循环是w_j（$j=1,\cdots,n+1$），其中$w_j=u_j+iv_j$且

$$x_0=u_1<u_2<\cdots<u_{n+1}=x_0+1$$

现构造三角形T_j具有角度θ_j，如图11.2.1.

注意到T_j位于一个基本域内（由凸性）且考虑到循环(w_j)的角度总和，我们有

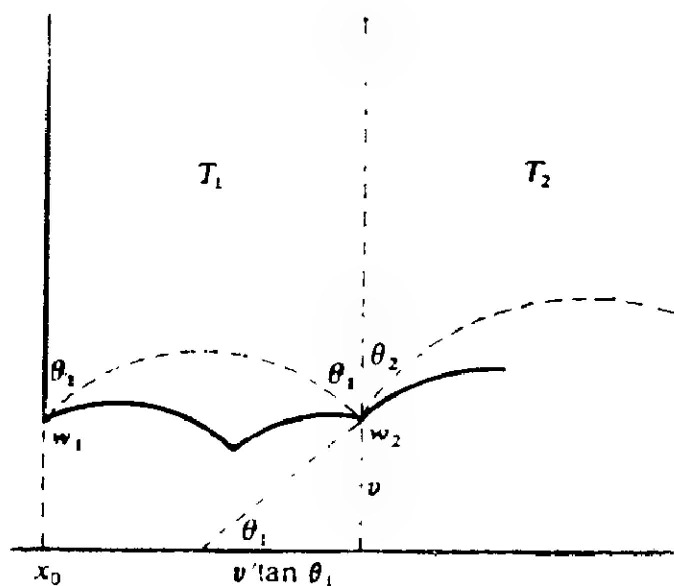


图 11.2.1

$$\sum_j \theta_j \leqslant \pi/q \tag{11.2.1}$$

其中循环（w_j）具有阶q（对偶然循环，$q=1$）。考虑T_j到x-轴上的欧氏投影，显然有

$$\sum_j v\cot\theta_j = \frac{1}{2}$$

由$Jensen$不等式（1.2.2），知（首先利用(11.2.1)）

$$\begin{aligned}\cot(\pi/qn) &\leqslant \cot\left(n^{-1}\sum_j \theta_j\right)\\ &\leqslant \sum_j n^{-1}\cot\theta_j\\ &= 1/2vn\end{aligned}$$

由此导出下面的结果。

定理11.2.1 在一个作用在H^2上的$Fuchs$群G内，假设$q: z\mapsto z+1$生成∞的稳定核且$w_1,\cdots,w_n$是一个阶为q的循环中那些位于带域$x_0<x<x_0+1$内的顶点。那么

$$\operatorname{Im}[w_j]\leqslant \frac{1}{2n}\tan(\pi/qn)$$

因对偶然循环有$q=1$且$n\geqslant 3$，所以我们可得到以下结果。

推论11.2.2 若定理11.2.1中的(w_j)是偶然循环，则

$$\operatorname{Im}[w_j]\leqslant \frac{1}{6}\tan(\pi/3)=\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

或以不变的形式表示为

$$\sinh\frac{1}{2}\rho(w_j, gw_j)\geqslant\sqrt{3}$$

推论11.2.3 若定理11.2.1中的(w_j)是阶为q的椭圆循环$(q\geqslant 3)$，则

$$\operatorname{Im}[w_j]\leqslant \frac{1}{2}\tan(\pi/q)$$

或等价地有

$$\sinh\frac{1}{2}\rho(w_j, gw_j)\geqslant 1/\tan(\pi/q)$$

在11.3节中将会看到，推论11.2.3中的界是最佳的。

我们也能得到关于*Dirichlet*多边形边界上偶然顶点的不等式。

定理11.2.4 设G是非初等*Fuchs*群，v_1，$\cdots v_n$是中心为w的*Dirichlet*多边形边界上的一个偶然循环。

(i) 若$n\geqslant 5$，则$\cosh\rho(w, v_j)\geqslant 1/\tan^2(\pi/n)\geqslant 1.89\cdots$

(ii) 若$n=4$，则 $\cosh\rho(w, v_j)$ 不小于某一绝对常

数$\mu(>1)$；

(iii) 在$n=3$的情形中，不存在一般的下界。

如果G不含椭圆元素，那么对所有的n值均存在一个一般的下界。

定理11.2.5 设G是不含椭圆元素的非初等Fuchs群.如果(v_j)是在中心为w的Dirichlet多边形边界上的顶点的偶然循环，那么

$$\cosh \rho(w, v_j) \geqslant \sqrt{2}$$

[定理11.2.5的证明] 循环(v_j)位于圆周C上(比方说$\{z:\rho(z,w)=r\}$)且至少包含三个顶点，满足

$$v_2=g(v_1),\quad v_3=h(v_3)$$

设G_0是由g和h生成的群。若G_0是初等群，则它是以一个抛物元素或双曲元素f为生成元的循环群。无论在哪种情况下，点v_1，v_2，v_3不可能位于同一个圆周上，因此G_0必为非初等群。由定理8.3.1，知有

$$\sinh \frac{1}{2}\rho(v_1, gv_1)\sinh \frac{1}{2}\rho(v_1, hv_1)\geqslant 1$$

而

$$\begin{aligned}\rho(v_1, gv_1) &= \rho(v_1, v_2)\\ &\leqslant \rho(v_1, w)+\rho(w, v_2)\\ &= 2r\end{aligned}$$

对h有同样的结论。从而推出$\sinh r\geqslant 1$，这就是所要证的结果。 □

[定理11.2.4的证明] 由于所有各项在共轭变换下均不变，我们可设G作用于Δ上，且$w=0$。从而点v_j位于某个

圆周$\rho(z,0)=r$上（可假定进行了循环编号）。设弧（v_j, v_{j+1}）（不含任何其它的v_i）在原点所对的角是$2\alpha_j$且

$$\sum_j \alpha_j=\pi$$

由于循环长度至少是3，所以至多存在一个j使得$2\alpha_j\geqslant\pi$。若则$2\alpha_j<\pi$，则顶点为$0, v_j, v_{j+1}$，角为$2\alpha_j, \theta_j, \theta_j$的三角形$T_j$位于Dirichlet多边形内，且由于循环的角度和为2π，而有

$$\sum_j \theta_j\leqslant\pi$$

注意到由7.12节（考虑T_j的一半）可得（参看图11.2.2）

$$\cosh r\tan\theta_j\tan\alpha_j=1$$

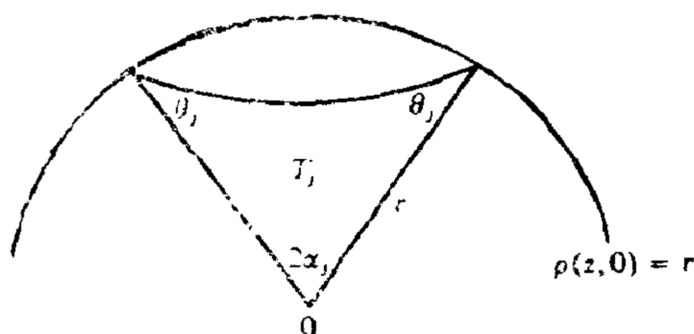


图 11.2.2

于是，要么每个α_j小于$\pi/2$因而有

$$\sum_{j=1}^{n}(\theta_j+\alpha_j)\leqslant 2\pi$$

要么恰有一个α_j（比方说α_n）至少是$\pi/2$此时

$$\sum_{j=1}^{n-1}(\theta_j+\alpha_j)\leqslant 2\pi-\alpha_n\leqslant 3\pi/2$$

在这两种情形中，某个$\theta_k+\alpha_k$至少等于其平均值这个值至少

是$2\pi/n$（由于$n\geqslant5$）。所以对这个k，有（参看1.2.3节）

$$\tan\alpha_k\tan\theta_k\leqslant\tan^2\left(\frac{\theta_k+\alpha_k}{2}\right)$$
$$\leqslant\tan^2(\pi/n)$$

这证明了（i）；顺便指出，当n为3或4时，这里没有提供任何信息。

$n=4$的情形要更复杂一些，（ii）的证明将在11.6节中给出。

为证明（iii），构造一个如图11.2.3所示的多边形P。这个多边形有四对边，且具有边偶元素g,h（都是2阶元素），hg（双曲元素）和f（抛物元素）。

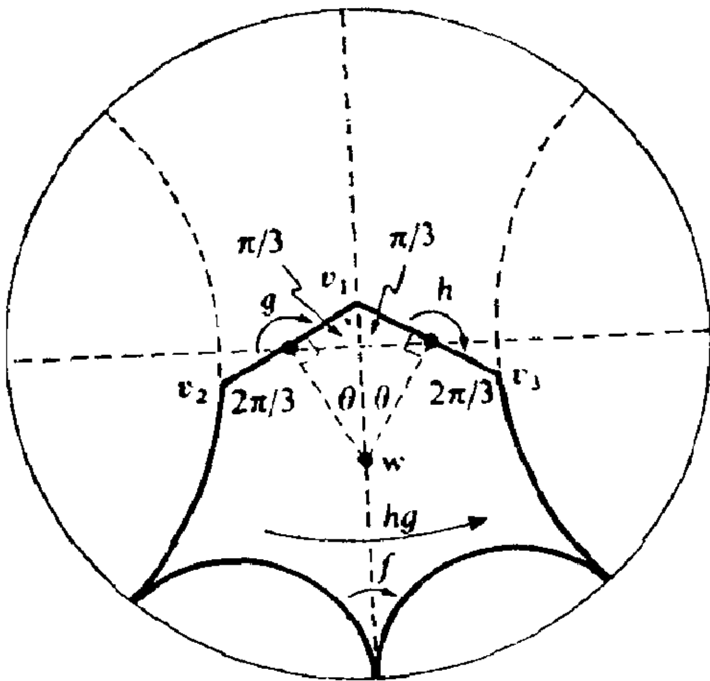


图 11.2.3

由Poincaré定理可知，P是由f,g和h生成的非初等Fuchs群的一个基本域。

当且仅当$\theta<\pi/6$时，这一构造才是可能的，此时有

$$\cosh t\sin(\pi/3)=\cos\theta,\ 2t=\rho(v_1,v_2)$$

因此可以证明当$\theta\to\pi/6$时有$t\to0+$。事实上，每个v_j到w的距离是相同的，且

$$\cosh\rho(w,v_1)\tan(\pi/3)\tan\theta=1$$

所以当$\theta\to\pi/6$时，有$\rho(w,v_1)\to0$。

以下只要证明p实际上是关于$\langle f,\ g,\ h\rangle$的一个以w为中心的*Dirichlet*多边形$D(w)$。由f所配对的边是线段$[w, fw]$和$[w,f^{-1}w]$的垂直平分线；对hg有类似的结论。其次，组成棱$[v_1,v_2]$的两条边位于$[w,\ gw]$的垂直平分线上；对$[v_1,\ v_3]$有类似的结论。由此推出P包含*Dirichlet*多边形$D(w)$；又因为P是一个基本域，所以它必是$D(w)$。 □

例11.2.6 给定任一整数k，$k\geqslant2$，我们可构造一个作用于Δ上的*Fuchs*群G，它以一个正多边形为基本域，这个正多边形有$4k$条边且所有的顶点位于一个偶然循环上(参看10.4节)。参考定理11.2.4(i)的证明，求得$\alpha_j=\theta_j=\pi/4k$，所以在这种情形下，(i)中的等号成立。故(至少对形如$4k$的n)定理11.2.4(i)是最佳的。

最后，我们来考虑无界的基本多边形(尽管下面证明的思想显然可以扩展到其它情形)。

定理11.2.7 设D是关于*Fuchs*群G的一个基本多边形，它包含无穷远圆周上的两点w_1和w_2。L是连接w_1和w_2的测地线。如果v是G的一个阶数为n的椭圆不动点，并且位于D的边界上，那么

$$\cosh\rho(v,L)\geqslant\frac{1}{\sin(\pi/n)}\geqslant\frac{2}{\sqrt{3}}$$

［证］ 因以w_1，w_2，v为顶点的三角形位于D内，所以这个三角形在v点的内角不会超过$2\pi/n$。这说明v不能与L太接近；数值计算的细节留给读者去完成。 □

注意：这一结果表明，在∂D上没有椭圆不动点属于两条与L成$\pi/6$角的超圆周之间的透镜状区域。

习题 11.2

1．导出一个类似于定理11.2.4中（i）的不等式，使它能应用于*Dirichlet*多边形边界上的q阶椭圆循环。

2．推论11.2.2中的界是最佳的吗？

3．设D是*Fuchs*群G的一个凸基本多边形。试证明：如果存在某个w使得D的边位于平分线$\{z: \rho(z,w)=\rho(z,gw)\}$上，$g\in G$，那么$D$是以$w$为中心的*Dirichlet*多边形。

4．设D是作用在Δ上的*Fuchs*群G的一个凸基本多边形，且包含一条测地线L。试证明：如果$\{v_1, \cdots, v_n\}$是∂D上的一个偶然循环，那么

$$\cosh \rho(v_1, L)+\cdots+\cosh \rho(v_n, L)$$

$$\geq n/\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\geq n^2/\pi$$

当v_j形成一个q阶椭圆循环时，试求出相应的不等式。

5．参看图11.2.3，证明$f^{-1}hg$是抛物元素（记$f=\alpha\beta, hg=\alpha\gamma$，其中$\alpha$，$\beta$和$\gamma$是反射）。

§11.3 Hecke 群

在这一节中，我们研究一类*Hecke*群，在下面的讨论中，它们作为例外群出现。

定义11.3.1 所谓*Hecke*群，指的是对满足$3\leqslant q\leqslant+\infty$的某一整数$q$具有符号差（0：2，$q$，∞）的三角群。

设

$$g(z)=-\frac{1}{z},\quad h(z)=z+2\cos(\pi/q)$$

则$\langle q,h\rangle$具有符号差（0:2，q，∞）和关于$\langle q,h\rangle$的一个基本域，如图11.3.1所示。因为具有相同符号差的二个三角群共轭，故可知任何具有符号差（0：2，q，∞）的*Hecke*群共轭于$\langle g,h\rangle$。顺便指出，hg是阶为q的椭圆元素，它以三角形的一个顶点为不动点。

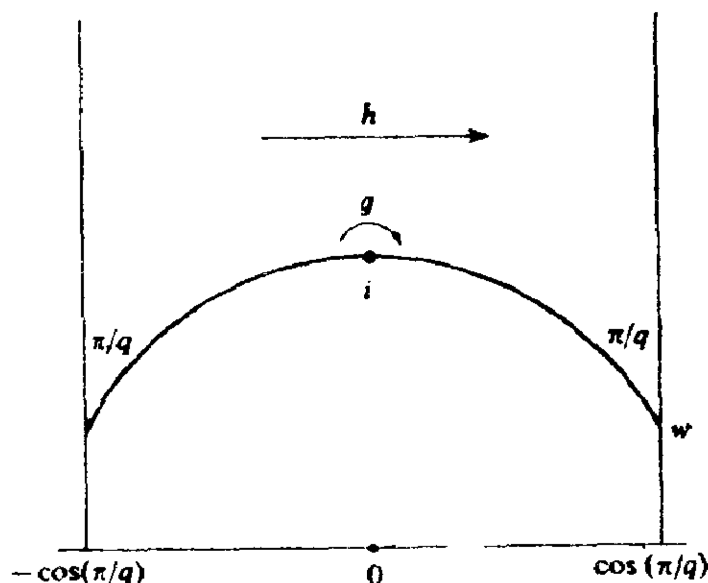


图 11.3.1

把抛物生成元h标准化为映射$z\mapsto z+1$，有时是方便的。此时，g变为

$$g(z)=-1/4z\cos^2(\pi/q)$$

它是2阶椭圆元素，以$i/2\cos(\pi/q)$为不动点。注意到在这种标准化下，阶为q的不动点w满足

$$\operatorname{Im}[w]=\frac{1}{2}\tan(\pi/q)$$

这说明推论11.2.3是最佳的。

下列结果有助于我们辨认*Hecke*群。

命题11.3.2 设G是具有抛物元素的*Fuchs*群。若G有一个双曲面积小于π的基本域，则G具有下列符号差之一：$(0:2,q,\infty)$ 其中$3\leqslant q\leqslant+\infty$，或 $(0:3,q,\infty)$ 其中$q=3,4$或5。

［证］ 因为基本多边形的面积有限，故G具有符号差 $(k:m_1,\cdots,m_n,\infty)$ （由于已知G含有抛物元素，故出现∞）。由10.4节推出

$$2\pi\left[2k-2+\sum_{j=1}^{n}\left(1-\frac{1}{m_j}\right)+1\right]<\pi \qquad (11.3.1)$$

故由$m_j\geqslant 2$而有

$$4k+n<3$$

从而$k=0$且（对正面积）$n=2$。有了这些信息，由(11.3.1)便可得到

$$\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}>\frac{1}{2}$$

因而$\min\{m_1,m_2\}\leqslant 3$。于是很容易推出所要证明的结果。 □

定理11.3.3 若G_0是一个*Hecke*群，G是一个包含G_0的*Fuchs*群，则$G=G_0$。

［证］ 可设G作用在H^2上，所以

$$k\,\text{h-area}(H^2/G)=\text{h-area}(H^2/G_0) \qquad (11.3.2)$$

其中k是G_0在G中的指数。由假设可知，G_0具有符号差$(0:2,p,\infty)$，故G具有命题11.3.2所述的一种符号差。

若$k\geqslant 2$，则

$$\text{h-area}(H^2/G)\leqslant \pi/2$$

所以G也是具有符号差$(0:\ 2,\ p,\ \infty)$的$Hecke$群（参看命题11.3.2的证明），这与（11.3.2）矛盾。故$k=1$且$G=G_0$。

作为另一种证明，可回顾一下，对于任何包含G_0的群来说，图11.3.1中的三角形顶点上的那些q阶椭圆不动点具有最大虚部。特别是，它们在G中元素作用下的象不可能有更大的虚部，因而这些不动点必位于G的相应基本域D的边界上（D是按照9.6节中的方法构造的基本域）。由凸性推出D包含该三角形，又因$G\supset G_0$，故D就是此三角形。从而$G=G_0$。

□

习题 11.3

1．参看图11.3.1，试证明hg是关于具有公共顶点w的两条边的反射的复合，因而是围绕点w的转角为$2\pi/q$的旋转。

2．试证明：如果G包含抛物元素，且$\text{h-area}(H^2/G)<2\pi/3$，则$G$是$Hecke$群。

§11.4 迹不等式

本节的目的是得到必被能生成非初等离散群的两个元素满足的一些代数不等式。

定理11.4.1 假设两个抛物元素g和h生成一个非初等$Fuchs$群G。则下列三种可能性之一必定出现。

(1)　$\text{tr}[g,h]\geqslant 18$；

(2)　$\text{tr}[g,h]=2+16\cos^4(\pi/r)$，且$G$具有符号差$(0:\ 2,r,\ \infty)$；

(3)　$\text{tr}[g,h]=2+16\cos^4(\pi/2r)$，且*G*具有符号差（0；*r*，∞，∞）。

［证］　经共轭变换，可设*G*作用于H^2上，且

$$h(z)=z+1,\quad g(z)=z/(cz+1)$$

不妨设$c>0$（必要时可以使用g^{-1}）。因为

$$\text{tr}[g,h]=\text{tr}[h,g]=2+c^2 \qquad (11.4.1)$$

故三种可能等价于

(1)　$c\geqslant 4$；

(2)　$c=2+2\cos(2\pi/r)$；

(3)　$c=2+2\cos(\pi/r)$。

由于*Jorgensen*不等式，即$c\geqslant 1$成立，若设（1）不成立，则有$1\leqslant c<4$。现构造一个四边形，其边由g和g^{-1}的等距圆周及直线$x=1/2$和$x=-1/2$组成；参看图11.4.1。显然，$1\leqslant c<4$蕴含点w的确存在。

考虑关于$x=0$，$x=1/2$和$|cz-1|=1$的反射，知hg^{-1}是

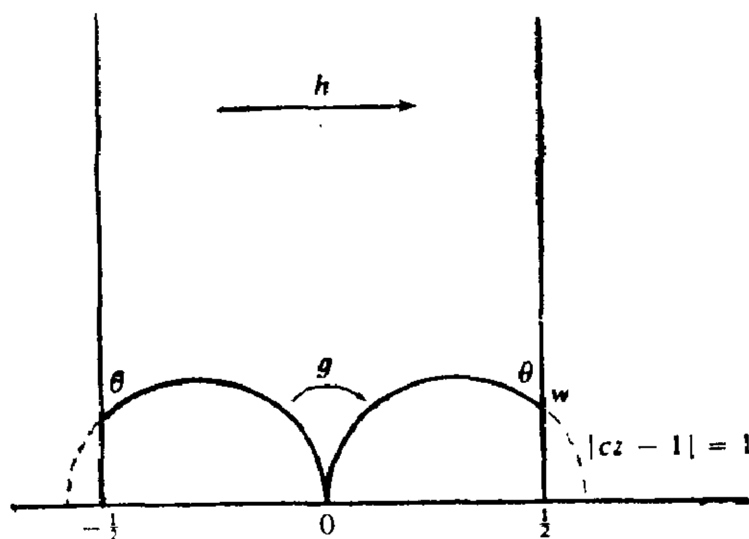


图 11.4.1

关于w点转角为2θ的旋转。所以对某个k和r（可设它们互素），有

$$\theta = k\pi/r, \qquad c = 2 + 2\cos(k\pi/r)$$

若$k=1$或$r=\infty$，则可应用Poincaré定理而推出，该四边形是G的一个基本多边形且G具有符号差$(0:r, \infty, \infty)$，这是情况（3）。

若$k \geqslant 2$且r有限，则在G中存在某个f，它是关于w点转角为$2\pi/r$的旋转。在这种情况下，构造一个如图11.4.2所示的四边形。显然，当$k \geqslant 2$时，有$\pi/r = \theta/k \leqslant \theta/2$，故由初等三角学有$\phi \geqslant \pi/2$。

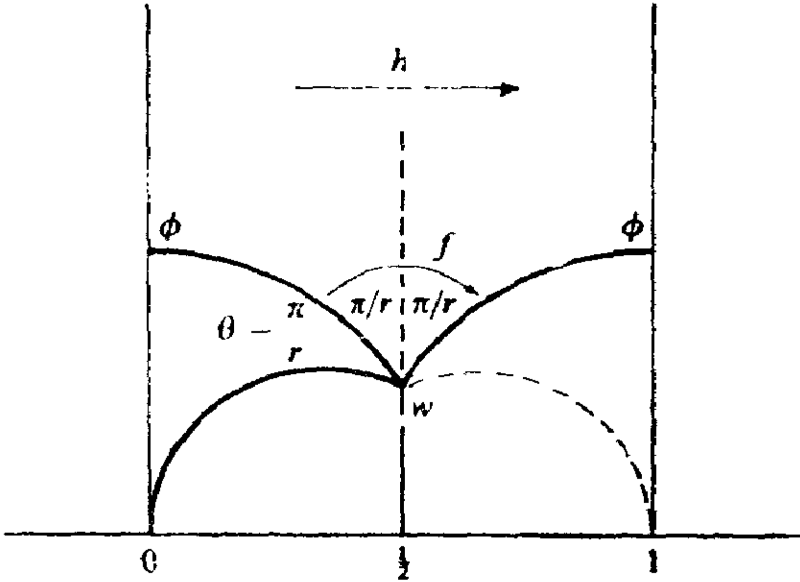


图 11.4.2

于是，角度为0，ϕ，ϕ，$2\pi/r$的四边形在$\langle h, f\rangle$作用下（因而在G作用下）的象覆盖双曲平面（因为从w出发的任一曲线被四边形的象每次覆盖一小段固定距离），从而G有一个面积至多为$\pi-(2\pi/r)$的基本域。命题11.3.2说明G是具有符号差$(0: r_1, s, \infty)$的三角群，其中r_1由r导出。故

$$2\pi\left(1-\frac{1}{r_1}-\frac{1}{s}\right)\leqslant 2\pi-2\phi-\frac{2\pi}{r}$$

$$\leqslant \pi-\frac{2\pi}{r}$$

$$\leqslant \pi-\frac{2\pi}{r_1}$$

这说明$s=2$，所以上式中的等号都成立且$\phi=\pi/2$。由$\phi=\pi/2$，知$\theta=2\pi/r$，于是$k=2$，$r=r_1$，这便是情况(2) □。

定理11.4.2 假设h是抛物元素且g和h生成一个非初等Fuchs群G。则

(1) $\operatorname{tr}[g,h]\geqslant 3$；

(2) 若$3\leqslant \operatorname{tr}[g,h]<6$，那么$G$具有符号差（0：2，$q$，∞）且

$$\operatorname{tr}[g,h]=4+2\cos(2\pi/q);$$

(3) 若$\operatorname{tr}[g,h]<18$，那么$G$含有椭圆元素。

〔证〕 可设G作用于H^2上且

$$h(z)=z+1,\quad g(z)=\frac{az+b}{cz+d}$$

其中$ad-bc=1$，$c>0$。由（11.4.1）成立可知（1）就是Jorgensen不等式。为证明（2），设$\operatorname{tr}[g,h]<6$或等价地$c<2$。这意味着G有一个基本域，它在g的等距圆周之外而位于宽为1的一个垂直带域内；参看图11.4.3。因为g的等距圆周的欧氏直经大于1，所以H^2/G的面积小于π，从而G具有命题11.3.2中所给符号差的一个。

再注意到$g=\sigma_2\sigma_1$，其中σ_1是关于L_1(由$|cz+d|=1$给出)

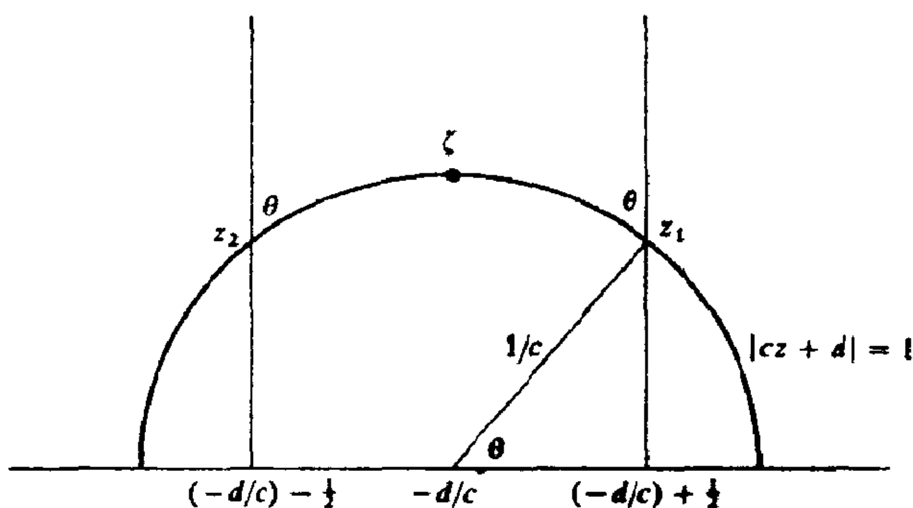


图 11.4.3

的反射，σ_2是关于竖直线L_2的反射。对任意选定的整数n，设L_3是L_2平移$n/2$（欧氏意义下的距离）所得到的直线。则

$$h^n g = (\sigma_3\sigma_2)(\sigma_2\sigma_1)$$
$$= \sigma_3\sigma_1$$

故$\sigma_3\sigma_1$属于G。

现设L是与L_1正交的竖直测地线；参看图11.4.4。通过取n使L和L_3的欧氏距离最小，可知L_3与L_1相交于一点w，设交角

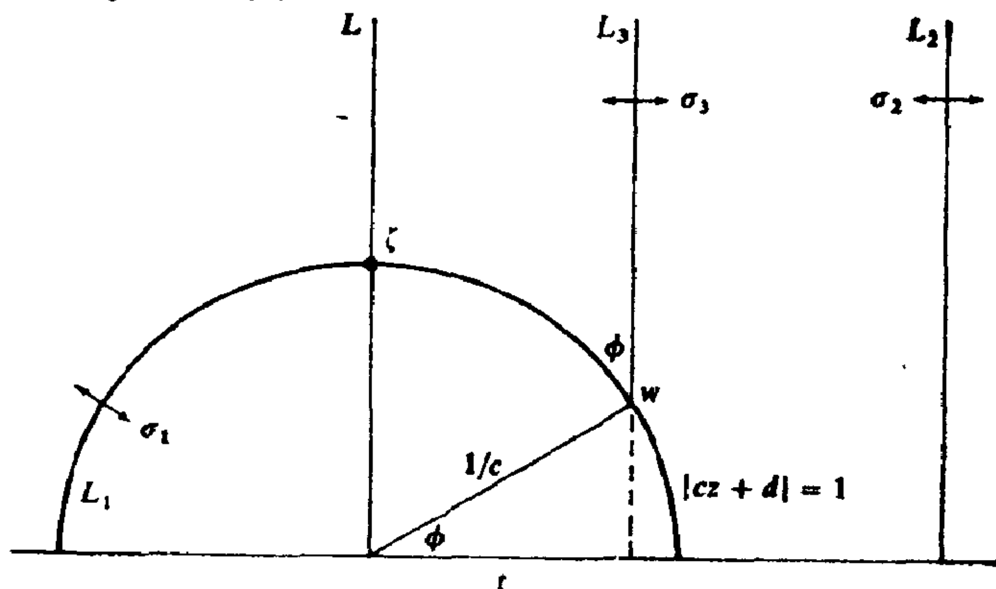


图 11.4.4

为ϕ。则$h \circ g$以w为不动点，并且是关于点w转角为2ϕ的一个旋转。显然，若t是L和L_3之间的距离，则$t<1/4$且

$$\cos\phi = ct$$

$$< \frac{1}{2}$$

故$\phi>\pi/3$。且有$\phi\leqslant\pi/2$。

若p是不动点w的阶，则$\phi=k\pi/p$，$(k,p)=1$。因而同

$$\frac{1}{3}<k/p\leqslant\frac{1}{2} \tag{11.4.2}$$

样，由推论11.2.3有

$$\begin{aligned}\tan(\pi/p) &\geqslant 2\mathrm{Im}[w] \\ &= 2(1/c)\sin\phi \\ &\geqslant \sin(\pi/3) \\ &= \sqrt{3}/2\end{aligned} \tag{11.4.3}$$

所以$p=2$，3或4。对这些p值，(11.4.2) 的唯一解导出$\phi=\pi/2$，$p=2$，$w=\zeta$。因此G包含象f这样的二阶椭圆元素，它以ζ为不动点。

若G具有符号差$(0:3, q, \infty)$，其中$q=3$或4或5，则必有$q=4$（因为$f\in G$）。但在这一情形下，w是一个四阶不动点，所以

$$\begin{aligned}2\mathrm{Im}[w] &\leqslant \tan(\pi/4) \\ &= 1\end{aligned}$$

这与 (11.4.3) 矛盾。故G必是具有符号差$(0:2, q, \infty)$的Hecke群。元素h和f生成G且使如图11.4.3所示的三角形的边配对（f使边$[\zeta, z_1]$和$[\zeta, z_2]$互换）。考虑其面积，有

$$\pi-2\pi/q\leqslant\pi-2\theta$$

所以$\theta\leqslant\pi/q$。另一方面，G中旋转的最小转角为$2\pi/q$，故$2\theta\geqslant 2\pi/q$。这说明$\theta=\pi/q$且

$$c=2\cos(\pi/q)$$

它就是（2）。

若G不含椭圆元素，则$c\geqslant 4$（参看定理8.3.1的证明）。所以（3）成立。 □

用椭圆元素代替抛物元素，成立着类似的结果。

定理11.4.3 若g是关于双曲平面上某一点转角为$2\pi/n$（$n\geqslant 3$）的旋转，f和g生成一个非初等Fuchs群，则除了某些三角群（在证明中已列出）外，有

(1) $$\operatorname{tr}[f,g]\geqslant 2+4\cos^2(\pi/n)\geqslant 3$$

(2) $$|\operatorname{tr}^2(g)-4|+|\operatorname{tr}[f,g]-2|\geqslant 4$$

注： 若f和g属于同一个离散的非三角群，则要么$\langle f,g\rangle$为初等群，要么(1) 和（2）成立；参看定理10.6.5。

对所有的$n\geqslant 3$，不等式（2）均有意义；但若将n的下界改为1，就不再正确了。

［证］ 可设f和g作用在Δ上且写成矩阵的形式为

$$g=\begin{pmatrix} e^{i\pi/n} & 0 \\ 0 & e^{-i\pi/n}\end{pmatrix},\quad f=\begin{pmatrix} a & \bar{c} \\ c & \bar{a}\end{pmatrix}$$

其中$|a|^2-|c|^2=1$。于是$\langle f,g\rangle$具有一个位于区域D内的基本域，如图11.4.5所示；这里的D是在f^{-1}的等距圆周之外且位于角为$2\pi/n$的扇形内的区域，这个扇形关于等距圆周对称。

例外群是那些使D有界的群。在这种情形下，符号差$(k;m_1,\cdots,m_s)$满足

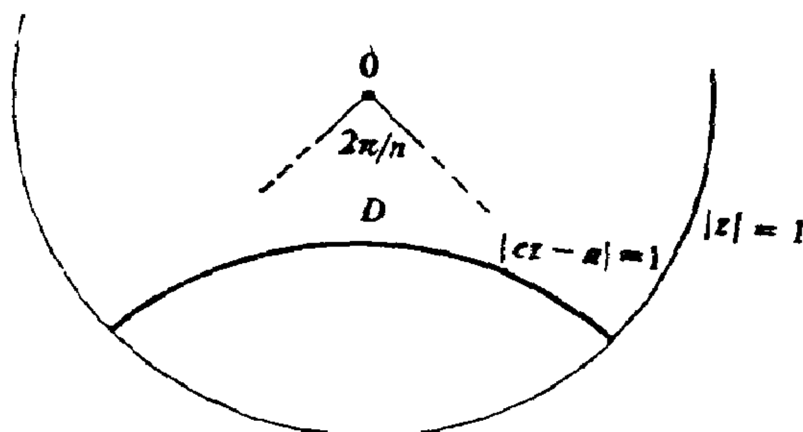


图 11.4.5

$$2\pi[2k-2+\sum_{j=1}^{s}(1-\frac{1}{m_j})]<\pi-2\pi/n$$
$$\leqslant\pi-2\pi/m_s \qquad (11.4.4)$$

其中n整除m_s。故$k=0$且$s=3$。对（11.4.4）作更仔细的分析导出例外情形

$m_1=2$或（m_1, m_2）=（3, 3），（3, 4）或（3, 5）

现设$\langle f, g\rangle$不是这些例外群中的任一个，则D无界。注意到f^{-1}的等距圆周是$[0,f0]$的平分线，利用平行角公式可得

$$\cosh\frac{1}{2}\rho(0,f0)\sin(\pi/n)\geqslant1$$

或等价地有

$$\sin^2(\pi/n)\sinh^2\frac{1}{2}\rho(0,f0)\geqslant\cos^2(\pi/n)$$

由于

$$|c| = \sinh \frac{1}{2}\rho(0, f0)$$

$$\geqslant \cot(\pi/n)$$

通过计算可先后得到（1）和（2）。 □

习题 11.4

1. 试证明：在定理11.4.1的证明中，$c>0$的假设保证了g作用在如图11.4.1所示的方向上.

2. 假设$c>4$，G由

$$h(z) = z+1, \quad g(z) = \frac{z}{cz+1}$$

生成，试证明G是离散的，并求出其符号差。

试用分析方法和几何方法（要短得多）证明gh^{-1}是具有平移长度T的双曲元素，其中$x=1/2$与g的等距圆周的双曲距离为$T/2$。

3. 假设G是作用在H^2上的$Fuchs$群，它含有

$$h(z) = z+1, \quad g(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad (c \neq 0, ad-bc=1)$$

试证明$\text{h-area}(H^2/G) \geqslant \pi/3$。

证明由g的等距圆周和两条竖直线

$$x = (-d/c) - \frac{1}{2}, \quad x = (-d/c) + \frac{1}{2}$$

所界的三角形包含G的一个基本域，由此推出$|c| \geqslant 1$（即$Jorgensen$不等式）。

4. 象定理11.4.2的证明那样，设$c<2$。试证明G包含如下的二阶元素。

(i)设

$$f(z)=\frac{az+b}{cz+d} \qquad (ad-bc=1)$$

属于G，它具有最小(正的)$|c|$值。考虑f^2的矩阵，试证明：要么f的阶为2，要么$|\mathrm{tr}(f)|\geqslant 1$。

（ii）证明对适当的n，$|\mathrm{tr}(h^n f)|<1$，因而$h^n f$是二阶元素。

§ 11.5 三个二阶椭圆元素

设f，g，h是三个二阶椭圆元素，其不动点u，v，w互不相同。若u，v，w共线，则由f,g,h生成的群G是初等的，因为它使包含这三点的测地线保持不变。故不妨设u,v,w不共线，设以u,v,w为顶点的三角形的三个角为α,β,γ，三边的长度为a,b,c；参看图11.5.1。

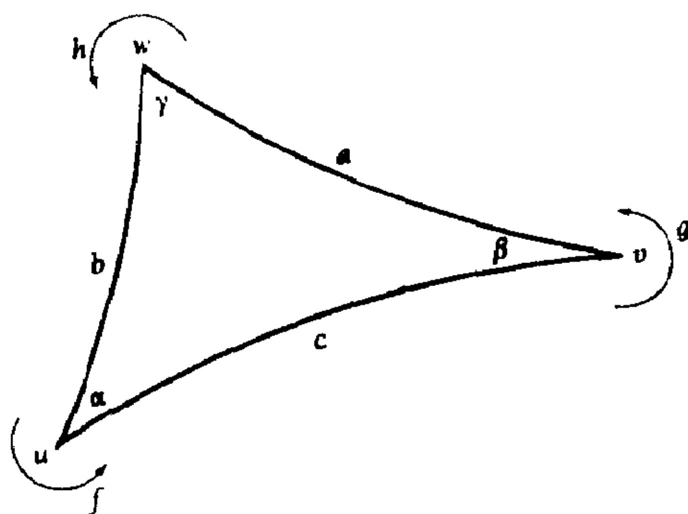


图 11.5.1

三角形的三个顶点决定一个如下定义的正数λ。

$$\begin{aligned}\lambda &= \sinh a \sinh b \sinh c\\ &= \sinh b \sinh c \sin \alpha \qquad (11.5.1)\end{aligned}$$

$$=\sinh c \sinh a \sin \beta$$

上述等式是正弦定律的推论。若把边$[u, v]$看成是位于测地线L_w上的三角形的底，则三角形的高为$\rho(w, L_w)$，其中

$$\sinh \rho(w, L_w)=\sinh a \sin \beta$$

所以不管选哪条边为底，我们均可明确地写成

$$\lambda=\sinh(\text{底}) \times \sinh(\text{高})$$

量λ与椭圆元素f, g, h的关系如下。

定理11.5.1 等距映射fgh，hfg，ghf，hgf，fhg，gfh中任一个的迹的绝对值为2λ。

[证] 首先，$|\operatorname{tr}(fgh)|$在f, g, h的循环置换下不变；例如

$$\begin{aligned}|\operatorname{tr}(fgh)| &= |\operatorname{tr} h(fgh)h^{-1}| \\ &= |\operatorname{tr}(hfg)|\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}|\operatorname{tr}(fgh)| &= |\operatorname{tr}(fgh)^{-1}| \\ &= |\operatorname{tr}(hgf)|\end{aligned}$$

故$|\operatorname{tr}(fgh)|$在f, g和h的任何置换下不变。

设L是过u，v两点的测地线。作

(i) 过w且与L正交的测地线L_1；

(ii) 过w且与L_1正交的测地线L_2；

(iii) 与L正交的测地线L_3和L_4，满足

$$\rho(L_1, L_3)=\rho(u, v)=\rho(L_1, L_4)$$

参看图11.5.2。

若记σ_j为关于L_j的反射，则有

$$\sigma_2\sigma_1=h, \qquad \sigma_1\sigma_3=fg \ (\text{或}gf)$$

这是因为fg是以L为轴，以$2\rho(u,v)$为其平移长度的双曲元

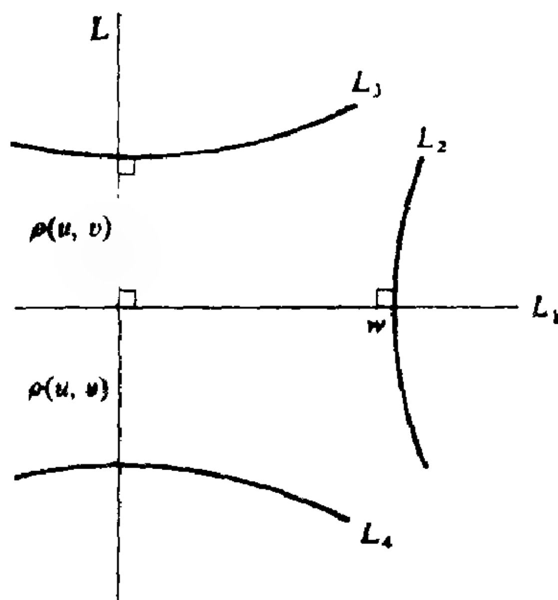


图 11.5.2

素。由定理7.38.1推出

$$\frac{1}{2}|\mathrm{tr}(hfg)| = \frac{1}{2}|\mathrm{tr}(\sigma_2\sigma_3)|$$
$$= (L_2, L_3)$$

当L_2和L_3不交时，反积(L_2, L_3)为$\cosh\rho(L_2, L_3)$。当L_2和L_3相交成ϕ角（可能是0）时，反积为$\cos\phi$。在所有情形下（参看定理7.17.1，引理7.17.3和定理7.18.1（iii））均有

$$\begin{aligned}(L_2, L_3) &= \sinh\rho(L, L_2)\sinh\rho(L_1, L_3)\\ &= \sinh\rho(w, L)\sinh\rho(u, v)\\ &= \lambda\end{aligned}$$ □

现在来检查一下λ的值是怎样决定由f，g,h生成的群的性质的。

定理11.5.2 设f，g和h是二阶椭圆元素，它们生成一

个非初等群G，λ由（11.5.1）给出。

（1）若$\lambda>1$，则G是离散的且具有符号差（$0:2,2,2;0;1$）。

（2）若$\lambda=1$，则G是离散的且具有符号差（$0:2,2,2;1;0$）。

（3）若$\lambda<1$，则仅当λ是下列值

$$\cos(\pi/q),q\geqslant3;\ \cos(2\pi/q),\ q\geqslant5;$$
$$\cos(3\pi/q),\ q\geqslant7$$

之一时，G是离散的。G的可能符号差是

$$(0:2,2,2,q;0;0),\ (0:2,3,q;0;0),\ (0:2,4,q;0;0)$$

关于每个离散群G的基本域的构造将在证明中给出，而且很显然，定理11.5.2中所给的每个λ值的确都会产生一个离散群。所以我们能导出下面的一般界限。

推论11.5.3 若f，g和h是二阶椭圆元素，它们生成一个非初等离散群，则

$$|\mathrm{tr}(fgh)|\geqslant2\cos(3\pi/7)$$

而且这个下界是最佳的。

〔定理11.5.2的证明〕 先假设$\lambda>1$，则可构造一个如图11.5.3所示的多边形，其中u'和v'分别是u和v在具有轴L的双曲元素fg的某个方幂下的象。顺便指出

$$\rho(L_3,L_4)=2\rho(u,v)$$

设以u'和v'为不动点的元素分别为

$$(fg)^m f(fg)^{-m},\ (fg)^m g(fg)^{-m}$$

图11.5.3中的多边形的边偶映射生成G，由Poincaré定理可知，该多边形是G的基本域。在此情形下，G具有符号差（$0:2,2,2;0;1$）。这就证明了(1)；由于当L_2与L_3和L_4在

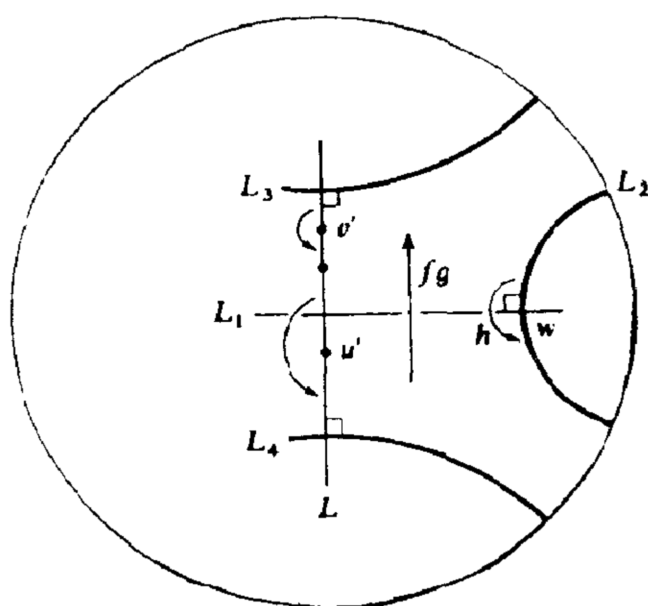


图 11.5.3

无穷远圆周相切时恰好$\lambda=1$，作些显而易见的修改就可得到（2）。

$\lambda<1$时的证明要困难一些；此时L_2与L_3和L_4相交成θ角，我们考虑如图11.5.4所示的多边形。注意到如早先已讨论过的，有$\lambda=\cos\theta$。

现设G是离散群。则hgf（或hfg）满足

$$hgf=(\sigma_2\sigma_1)(\sigma_1\sigma_3)$$
$$=\sigma_2\sigma_3$$

这是一个关于ζ点转角为2θ的旋转。设ζ是一个q阶椭圆不动点，则对某一整数p，$(p,q)=1$，有$\theta=\pi p/q$。

若$p=1$，则我们可以得到G的一个基本多边形，而且在这一情形下G具有符号差（0：2，2，2，q；0；0），且有$\lambda=\cos(\pi/q)$，其中$q\geq3$。

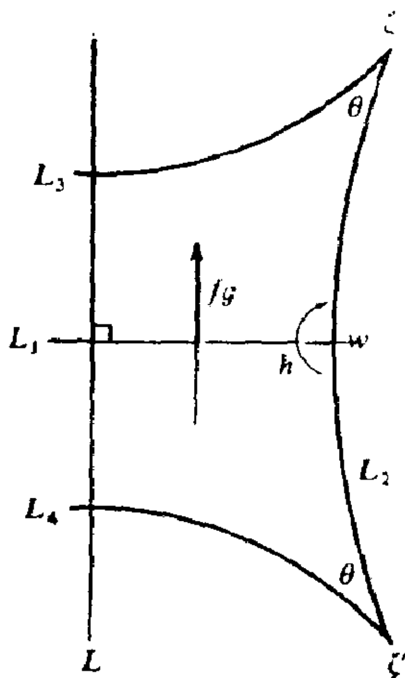


图 11.5.4

从现在起可设$p\geqslant 2$。紧四边形的G-象覆盖了双曲平面(存在一个正数r，使得四边形的每个点位于被G-象盖住的半径为r的圆盘内)，于是，通过考虑面积，有

$$2\pi\left[2k-2+\sum_{j=1}^{s}\left(1-\frac{1}{m_j}\right)\right]\leqslant \pi-2\pi P/q$$

其中（k：$m_1,\cdots,m_s$）是G的符号差。这给出

$$4k-4+s<1$$

对正面积还有

$$0<2k-2+s$$

所以仅有的可能是$k=0$，$s=3$或4。

事实上$s=3$。为说明这一点设$s=4$。由于G包含一个q阶元素，故可设q整除m_4。因$P\geqslant 2$，$m_j\geqslant 2$和$q\leqslant m_4$，而有

$$2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{m_4}\right)\leqslant 2\left[2-\sum_{j=1}^{4}\frac{1}{m_j}\right]$$

$$\leqslant 1-\frac{2p}{q}$$

$$\leqslant 1-\frac{4}{m_4}$$

这蕴含了$m_4=\infty$，因而G含抛物元素；但这是不可能的，因为四边形是紧的并且包含每条轨道中的点。故$s=3$且G是三角群。

记G的符号差为$(0:l,m,n)$，其中q整除n。由定理9.8.6可知，存在正整数N使得四边形包含平面上每一点的N个象。考虑其面积，有

$$2\pi N\left[1-\left(\frac{1}{l}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)\right]=\pi-\frac{2\pi p}{q}$$

由于$\theta=\pi p/q$且ζ和ζ'在同一轨道内，故有$N\geqslant p$（考虑接近ζ的点）。从而

$$2p\left[1-\left(\frac{1}{l}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)\right]$$

$$\leqslant 2N\left[1-\left(\frac{1}{l}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)\right]$$

$$\leqslant 1-\frac{2p}{q}$$

$$\leqslant 1-\frac{2p}{n} \tag{11.5.2}$$

由第一项与最后一项之间的不等式得出（因$p\geqslant 2$）

$$\frac{1}{l}+\frac{1}{m}\geqslant\frac{2p-1}{2p}\geqslant\frac{3}{4}$$

且其解为

$$(l,m,n)=(2,3,2),\ (2,3,3),\ (2,4,2)$$

若（l, m, n）=（2, 3, 2），则（11.5.2）中的等式都成立，从而$q=n$；故在这一情形中G具有符号差$(0:2,4,q)$，其中$q\geqslant 5$且$\lambda=\cos(2\pi/q)$。

若（l, m, n）=（2, 3, 3），则（11.5.2）中的等式也都成立，从而$q=n$，G具有符号差（$0:2,3,q$），其中$q\geqslant 7$且$\lambda=\cos(3\pi/q)$。

对余下的情形，即（l, m, n）=（2, 3, 2），需要作稍为不同的讨论。首先，椭圆不动点u', v', w, ζ和ζ'至多位于两条轨道内（没有一点能位于一条3阶轨道内）。这意味着$N\geqslant 3$，利用（11.5.2）的中间项，有

$$6\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{n}\right)\leqslant 1-\frac{4}{q}$$

所以$q=n$（因为n/q是整数）。这实际上完成了对所述定理11.5.2的证明，尽管没有断言哪个符号差对应于哪个λ值。简而言之，存在上述方程的整数解，它不对应于离散群；更仔细的分析可得到所有的可能情况。例如由（11.5.2）的中间项得到

$$N=3+\frac{6}{n-6}$$

所以$(n,N)=(7,9)$，（8, 6），（9,5）或（12,4）。不过N必须是3的倍数（考虑四边形中的三阶不动点）。 □

作为可能情形的一种解释，考虑如图11.5.5所示的四边形，其中$\rho(u',w)=\rho(u',v')$。设α，β和γ是如图所示

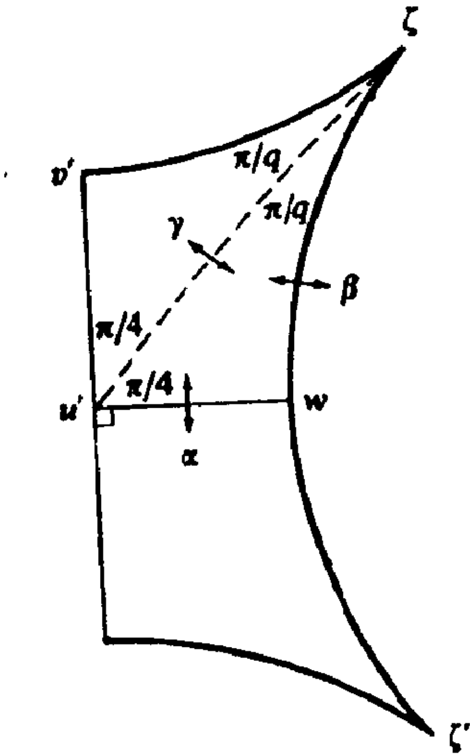


图 11.5.5

的反射。则三个二阶旋转（分别以w，u'和v'为不动点）分别是$\alpha\beta$，$(\alpha\gamma)^2$和$\gamma(\alpha\beta)\gamma$，它们与$\alpha\beta$，$\beta\gamma$和$\gamma\alpha$生成同一个群，即具有符号差（0：2，4，$q$）的三角群。

习题 11.5

1. 假设f，g和h是二阶椭圆元素，分别具有共线的不动点u，v和w。找出用$\rho(u, v)$和$\rho(v, w)$表达群$\langle f,g,h\rangle$离散的充分必要条件。

2. 试利用矩阵给出定理11.5.1的证明（取f，g，h使其在H^2内分别以i，ti，$u+\mathrm{i}v$为不动点）。

§ 11.6 位移函数的一般界限

我们的目的，是就使$\langle g,h\rangle$为离散非初等群的元素g和h的各种选取，求出

$$M(g,h)=\inf_z \max\left\{\sinh\frac{1}{2}\rho(z,gz),\right.$$

$$\left.\sinh\frac{1}{2}\rho(z,hz)\right\}$$

和

$$P(g,h)=\inf_z \sinh\frac{1}{2}\rho(z,gz)\sinh\frac{1}{2}\rho(z,hz)$$

的下界，注意到

$$M(g,h)^2\geqslant P(g,h)$$

显然，$P(g,h)$的下界是更可取的，因为它表明若其中一个双曲正弦项很小，另一项则相应较大；但这一点却不能从$M(g,h)$的下界推出。若g或h是椭圆元素，则$P(g,h)=0$，这时必须采用$M(g,h)$。

不等式$M(g,h)\geqslant m$意味着对每点z，g或h把z点至少移动距离$2\sinh^{-1}(m)$。已知在每种情况下均有

$$M(g,h)\geqslant 0.131846\cdots$$

下界的存在性是由Marden建立的，而这个最佳下界却由Yamada得到，我们将在定理11.6.14中给出证明。

$M(g,h)$和$P(g,h)$的最佳下界的计算与关于g和h的几何约束密切相关，在这一节中数值界限和几何约束两者都将出现。关于这一点，读者应回顾一下定理8.3.1：若$\langle g,h\rangle$

离散、非初等且没有椭圆元素，则 $P(g,h)\geqslant 1$，并且这个下界是最佳的。

我们将就g和h的分类得出不同的下界。首先，假设其中之一是抛物元素。

定理11.6.1 设g和h是等距映射，$\langle g,h\rangle$是离散非初等群。

(1) 若g和h是抛物元素，则 $P(g,h)\geqslant 1/4$。若进而假设 $\langle g,h\rangle$ 不是三角群，则$P(g,h)\geqslant 1$。

(2) 若g是抛物元素而h是双曲元素，则 $P(g,h)\geqslant 1/4$。若进而假设 $\langle g,h\rangle$ 不是三角群，则 $P(g,h)\geqslant 1/2$。

所有四个下界都是最佳的。

［证］ 设g是抛物元素，h是抛物或双曲元素，不妨设g和h作用在H^2上且

$$g(z)=z+1,\quad h(z)=\frac{az+b}{cz+d},\quad ad-bc=1$$

由于 $\langle g,h\rangle$ 非初等，因而$c\neq 0$。于是h有两个实的有限不动点u和v（也可能重合），且

$$\begin{aligned}|z-h(z)|\cdot|cz+d| &= |c|\cdot|z-u|\cdot|z-v|\\ &\geqslant |c|\,y^2\end{aligned}$$

由定理7.2.1，得到

$$\begin{aligned}&\sinh\frac{1}{2}\rho(z,gz)\sinh\frac{1}{2}\rho(z,hz)\\ &\quad=|z-h(z)|\cdot|cz+d|/4y^2\\ &\quad\geqslant |c|/4 \end{aligned}\tag{11.6.1}$$

但由$Jorgensen$不等式有 $|c|\geqslant 1$，所以在两种情况下都有 $P(g,h)\geqslant 1/4$。

现在假设 $\langle g,h\rangle$ 不是三角群。若h是抛物元素，则由定理11.4.1可得 $|c|\geqslant 4$，因而 $P(g,h)\geqslant 1$。若 h 是双曲元素，则从定理11.4.2推出$|c|\geqslant 2$，所以 $P(g,h)\geqslant 1/2$。这便建立了(1)和(2)。下面的例子说明这些下界是最佳的。□

例11.6.2 给定等距映射g，h，f为

$$g(z)=z+1,\quad h(z)=\frac{z}{z+1},\quad f(z)=\frac{2z+3}{z+2}$$

它们分别是抛物、抛物、双曲元素，并且生成一个离散群（模群的子群）。利用（11.6.1），并取$z=\mathrm{i}y$进行计算得到

$$\sinh\frac{1}{2}\rho(z,gz)\sinh\frac{1}{2}\rho(z,hz)=\frac{1}{4}$$

和

$$\sinh\frac{1}{2}\rho(z,gz)\sinh\frac{1}{2}\rho(z,fz)=\frac{1}{4}+(3/4y^2)$$

令y趋于$+\infty$，可看出下界1/4是最佳的。□

例11.6.3 设$g(z)=z+1$，h是关于$|z+t|=t$的反射与关于$x=0$的反射的复合，其中$0<t<1/4$。则h是抛物元素且以原点为不动点。事实上，

$$h(z)=\frac{z}{(z/t)+1}$$

利用（11.6.1）可看出当$z=\mathrm{i}y$时有

$$\sinh\frac{1}{2}\rho(z,gz)\sinh\frac{1}{2}\rho(z,hz)=1/4t$$

显然$\langle g,h\rangle$是第二类非初等 Fuchs 群。通过令t趋于1/4，可知定理11.6.1（1）中的下界1是最佳的。□

例11.6.4 设$g(z)=z+1$，h是二阶椭圆元素，以 $\mathrm{i}v$为

不动点，其中$0<v<1/2$，则$\langle g, h\rangle$为离散非初等群，且

$$\left\{z\in H^2: |\mathrm{Re}\,[z]|<\frac{1}{2},\quad |z|>v\right\}$$

是$\langle g, h\rangle$的一个基本域。若记$f=gh$，则f为双曲元素且是关于$|z|=v$的反射与关于$x=1/2$的反射的复合。由此推出

$$f(z)=\frac{(z/v)-v}{(z/v)}$$

$$=1-(v^2/z)$$

因而

$$\sinh\frac{1}{2}\rho(z, gz)\sinh\frac{1}{2}\rho(z, fz)$$

$$=\frac{|z-fz|\cdot|z/v|}{4y^2}$$

$$=\frac{|z^2-z+v^2|}{4vy^2}$$

令$x=0$，y趋于$+\infty$，上述表达式趋于$1/4v$。由于v可与1/2任意接近且$\langle g, h\rangle=\langle g, f\rangle$，故知定理11.6.1（2）中的下界1/2是最佳的。 □

下面考虑一个生成元是椭圆元素，另一个生成元是抛物元素的情形；在这一情形中必须采用$M(g, h)$。

定理11.6.5 设g是抛物元素，h是q阶椭圆元素，$\langle g, h\rangle$为离散非初等群。

（1）若$q\geqslant 3$，则

$$M(g,h)\geqslant\frac{\cos(\pi/q)}{[1+2\cos(\pi/q)-\cos^2(\pi/q)]^{1/2}}$$

$$\geqslant 1/\sqrt{7}$$

（2） 若$q=2$，则$M(g,h)\geqslant 1/\sqrt{8}$。

（3） 若进而假设$\langle g,h\rangle$不是三角群，则对$q\geqslant 2$有

$$M(g,h)\geqslant\left(\frac{1+\cos(\pi/q)}{3-\cos(\pi/q)}\right)^{1/2}$$

$$\geqslant 1/\sqrt{3}$$

所有这些下界都是最佳的。

〔证〕 置

$$m(z)=\max\left\{\sinh\frac{1}{2}\rho(z,gz),\right.$$

$$\left.\sinh\frac{1}{2}\rho(z,hz)\right\}$$

可设g和h作用在H^2上，$g(z)=z+1$，h是环绕形如iv的点w转角为2θ（其中$0<2\theta<\pi$）的旋转。

对任意一点z_1，以z_2表示过z_1的水平直线（∞点的极限圆周）与过∞和w的测地线L的交点。设z_3是半射线$[w,\infty)$上的点，它使得z_2，z_3与w等距（若$\mathrm{Im}[z_1]\geqslant\mathrm{Im}[w]$，则$z_2=z_3$，否则两点不会重合）。故

$$\mathrm{Im}[z_1]=\mathrm{Im}[z_2]\leqslant\mathrm{Im}[z_3]$$

$$\rho(z_1,w)\geqslant\rho(z_2,w)=\rho(z_3,w)$$

所以（参看7.35节）有

$$m(z_1)\geqslant m(z_3)$$

由于

$$M(g,h)=\inf_z m(z)$$

因而我们只需对形如 $iy(y\geqslant v)$ 的 z 来讨论 $m(z)$ 的下确界。当 y 从 v 增长到 $+\infty$ 时，$\rho(z, gz)$ 减小到0，而 $\rho(z, hz)$ 却从0增长到 $+\infty$。因而存在唯一的 z，比方说 $z=it$，使得

$$\sinh\frac{1}{2}\rho(z,gz)=\sinh\frac{1}{2}\rho(z,hz)$$

且这个共同值就是 $M(g,h)$。

注意到（从7.35节）当 $z=it$ 时

$$\sinh\frac{1}{2}\rho(z,gz)=1/2t$$

且

$$\sinh\frac{1}{2}\rho(z,hz)=|\sin\theta|\sinh\rho(it,iv)$$

$$=\frac{1}{2}|\sin\theta|\left(\frac{t}{v}-\frac{v}{t}\right)$$

而有

$$t^2=v^2+\frac{v}{|\sin\theta|}$$

由于 h 是 q 阶元素（且 $h\neq I$），必有 $|\sin\theta|\geqslant\sin(\pi/q)$。由推论11.2.3知，若 $q\geqslant3$，则

$$v\leqslant\frac{1}{2}\tan(\pi/q)$$

所以

$$4t^2 \leqslant \tan^2(\pi/q) + \frac{2}{\cos(\pi/q)}$$

从而由

$$M(g,h) = 1/2t$$

可以得知（1）中含q的下界。通过初等计算可知，这是$\cos(\pi/q)$的递增函数且下界$1/\sqrt{7}$是$q=3$时的值。显然，对q的每一个值，所给出的下界都是最佳的；事实上，对于11.3节中所讨论的*Hecke*群，论述中的每一步等号都成立。

若$q=2$，则上述论证失效。然而在这一情形中$v \leqslant 1$（因不动点位于等距圆周上，且由*Jorgensen*不等式，$|c| \geqslant 1$），$\theta = \pi/2$，所以$t^2 \leqslant 2$。这就证明了（2）。这也是一个最佳估计；对此，可通过取$g(z) = z+1, h(z) = -1/z$及$z = i\sqrt{2}$来加以验证。

现设$\langle g, h\rangle$不是三角群。由于h是q阶的，h的某一方幂，比方说h^*，是关于iv点转角为$2\pi/q$的旋转，且$\langle g, h^*\rangle$（$=\langle g, h\rangle$）不是三角群。正如上面所述，有

$$t^2 \leqslant v^2 + \frac{v}{\sin(\pi/q)} \tag{11.6.2}$$

现在考虑一个四边形，它的边在直线$x=1/2$，$x=-1/2$以及h^*和h^{-*}的等距圆周上（在实轴上还可能有两条自由边）。这个四边形是无界的（定理10.6.6），故

$$\frac{v}{\sin(\pi/q)}[1+\cos(\pi/q)] < \frac{1}{2} \tag{11.6.3}$$

参看图11.6.1。

利用（11.6.2）和（11.6.3）便可得到

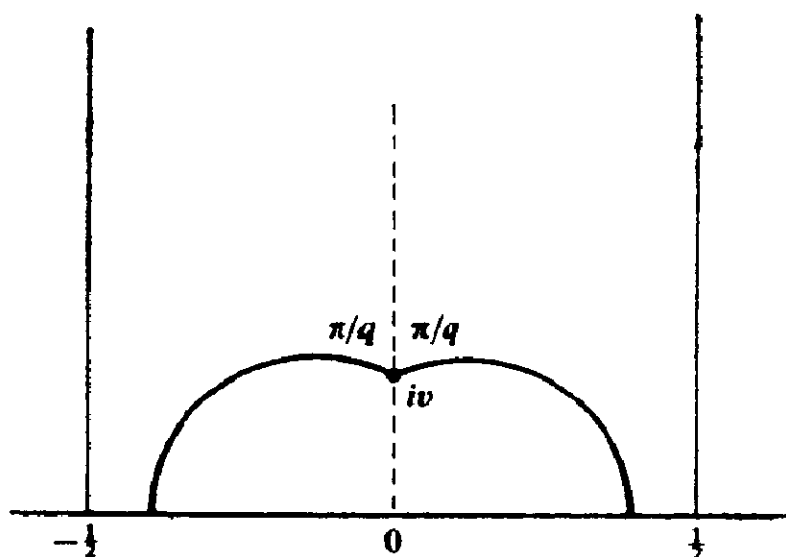


图 11.6.1

$$4t^2 \leqslant \frac{3-\cos(\pi/q)}{1+\cos(\pi/q)}$$

$$\leqslant 3$$

从而（3）中的下界成立。这个下界是最佳的，因为我们可以从证明中所提供的四边形出发构造出相应的群。其细节从略。 □

下面考虑两个椭圆生成元素。

定理11.6.6 若g和h分别是p阶和q阶椭圆元素，$\langle g,h\rangle$为离散非初等群。则

$$M(g,h) \geqslant \left(\frac{4\cos^2(\pi/7)-3}{8\cos(\pi/7)+7}\right)^{1/2} = 0.1318\cdots$$

若进而假设$\langle g,h\rangle$不是三角群，则

$$M(g,h) \geqslant \left(\frac{[\cos(\pi/p)+\cos(\pi/q)]^2}{4-[\cos(\pi/p)-\cos(\pi/q)]^2}\right)^{1/2}$$

$$\geqslant \frac{1}{\sqrt{15}}$$

两个下界都是最佳的。

下面的几何结果是我们所需要的。

定理11.6.7 若g是以u为不动点的p阶椭圆元素，h是以v为不动点的q阶椭圆元素，$\langle g,h\rangle$是离散的非初等群但不是三角群。则

$$\cosh\rho(u,v)>\frac{1+\cos(\pi/p)\cos(\pi/q)}{\sin(\pi/p)\sin(\pi/q)}$$

〔证〕 由$\langle g\rangle$中的某个g_1具有旋转角$2\pi/p$，$\langle h\rangle$中的某个h_1具有旋转角$2\pi/q$，且$\langle g,h\rangle=\langle g_1,h_1\rangle$知，可设$g$和$h$具有旋转角$2\pi/p$和$2\pi/q$。不失一般性，可设$g$和$h$作用在$\Delta$上，$u=0$且$v>0$。作$h$和$h^{-1}$的等距圆周及从原点出发与$(0,1)$交成$\pi/p$角的线段；参看图11.6.2。射线$L$和$L'$被$g$配对，射

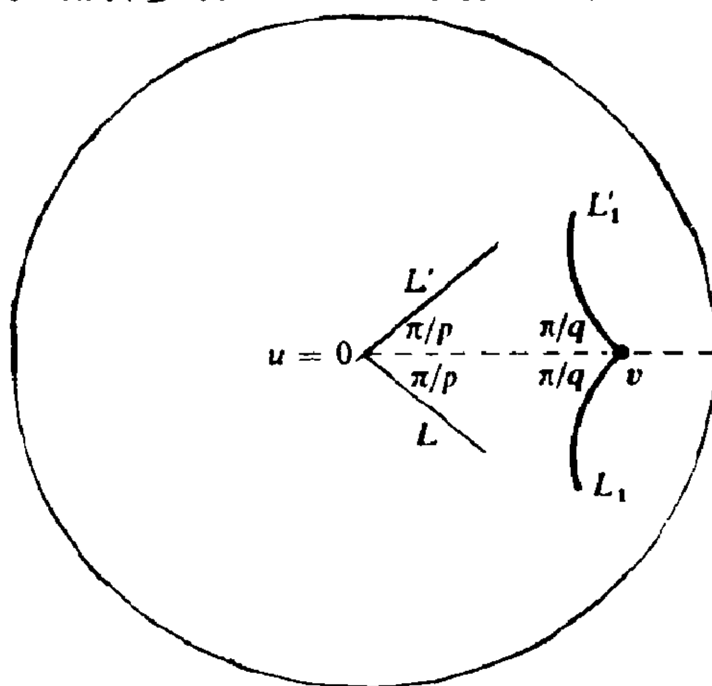


图 11.6.2

线L_1和L_1'被h配对。若L和L_1相交，则$\langle g,h\rangle$是三角群(定理10.6.6)；若不相交，则 $\cosh\rho(u,v)$ 以所给界限为其下界(定理7.10.1)。 □

〔定理11.6.6的证明〕 记

$$m(z)=\max\left\{\sinh\frac{1}{2}\rho(z,gz),\sinh\frac{1}{2}\rho(z,hz)\right\}$$

显然，若g或h被环绕同一点但旋转角较小的旋转代替，则对应的$m(z)$减小，故可设g和h作用在Δ上，且分别具有旋转角$2\pi/p$和$2\pi/q$，g以原点为不动点，h以v为不动点，$v>0$。正如定理11.6.5中的证明一样，$m(z)$的最小值在实线段〔0，v〕的某点x取到，该x满足

$$\sinh\frac{1}{2}\rho(x,gx)=\sinh\frac{1}{2}\rho(x,hx)$$

并且这个共同值正是$M(g,h)$。

现在记

$$\rho(0,x)=t,\quad \rho(0,v)=d$$

则$\rho(x,v)=d-t$。记

$$s_p=\sin(\pi/p),\quad c_p=\cos(\pi/p)$$

对s_q，c_q也有类似的定义。则

$$s_p\sinh t=s_q\sinh(d-t)$$

(两边均为$M(g,h)$)，从而

$$\tanh t=\frac{s_q\sinh d}{s_p+s_q\cosh d}$$

然而

$$M(g,h)^2=(s_p)^2\sinh^2 t$$

$$= \frac{(s_p)^2 \tanh^2 t}{1 - \tanh^2 t}$$

$$= \frac{(s_p s_q)^2 [\cosh^2 d - 1]}{(s_p)^2 + (s_q)^2 + 2 s_p s_q \cosh d} \qquad (11.6.4)$$

通过初等计算，可知这是$\cosh d$的递增函数；于是，若$\langle g, h\rangle$不是三角群，则可应用定理11.6.7，且

$$s_p s_q \cosh d \geqslant 1 + c_p c_q$$

代入（11.6.4）得到

$$M(g,h)^2 \geqslant \frac{(c_p + c_q)^2}{4 - (c_p - c_q)^2}$$

这就是定理中所述的下界。这一下界是c_p和c_q（在允许的范围内）的递增对称函数。所以取$p = 3$和$q = 2$（若$p = q = 2$，则$\langle g, h\rangle$是初等的）。便得到$M(g,h)^2$的一个下界，它等于1/15。显然从这一证明可构造出群来表明这一下界是最佳的。

余下的只是要对G是一个三角群的情况建立定理11.6.6中的第一个较小的下界。设G是具有符号差（0:m，n，r）的三角群。假设g和h分别伴随着m阶和n阶循环子群（但它们不必是m阶和n阶元素）。估计$M(g,h)$时必须考虑到假设g和h具有旋转角$2\pi/m$和$2\pi/n$时的估计，且$M(g,h)$的估计不能小于该估计；故可设$m = p$且$n = q$。在这一情形下，沿着三个角为π/p，π/q和π/r的三角形的边g和h的不动点u和v必被隔开一段距离（否则能构造一个基本域，其面积少于已知值）；于是由余弦定律有

$$\cosh \rho(u,v) \geqslant \frac{c_p c_q + c_r}{s_p s_q}$$

因（11.6.4）中的恒等式仍有效，故有

$$M(g,h)^2 \geqslant \frac{(c_p c_q + c_r)^2 - (s_p s_q)^2}{(s_p)^2 + (s_q)^2 + 2[c_p c_q + c_r]}$$

$$= \frac{c_p^2 + c_q^2 + c_r^2 + 2c_p c_q c_r - 1}{2 + 2c_r - (c_p - c_q)^2}$$

需要对所有满足

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$$

的p，q和r求出上述表达式的下确界。事实上，下确界在$r = 7$，$p = 2$，$q = 3$（或$p = 3$，$q = 2$）时达到；这时的下界是

$$\frac{4\cos^2(\pi/7) - 3}{8\cos(\pi/7) + 7} = 0.0173\cdots$$

一般地，有

$$2 + 2c_r - (c_p - c_q)^2 \leqslant 4$$

所以

$$M(g,h)^2 \geqslant \frac{1}{4}(c_p^2 + c_q^2 + c_r^2 + 2c_p c_q c_r - 1)$$

此时若假设p, q, r中之一至少是8，另一个至少是3，则

$$M(g,h)^2 \geqslant \frac{1}{4}[\cos^2(\pi/8) + \cos^2(\pi/3) - 1]$$

$$= 0.025\cdots$$

故在我们寻求$M(g,h)$的下界中，可设每个p，q和r至多是7。这就把问题简化为对有限个数的计算，而其大多数计算甚至还可略去。

若p，q和r中没有一个是2，则有两个至少是3，另一个

至少是4，故

$$M(g,h)^2 \geqslant \frac{1}{4}[2\cos^2(\pi/3)+\cos^2(\pi/4)$$

$$+2\cos^2(\pi/3)\cos(\pi/4)-1]$$

$$=0.088\cdots$$

所以可设p，q和r中之一为2。若没有一个为3，则其余的两个至少是4和5，故

$$M(g,h)^2 \geqslant [\cos^2(\pi/4)+\cos^2(\pi/5)-1]/4$$

$$>0.038$$

这就推出p,q和r中一个为2，另一个为3，第三个至多且（对正面积）也至少为7。下界关于p和q对称且分子关于p,q和r对称。故只需在（p，q，r）＝（2，3，7），（2，7，3），（3，7，2）的情况下求

$$2+2c_r-(c_p-c_q)^2$$

的最小值，我们略去其细节。 □

现在我们把注意力转向双曲元素。首先建立一些几何约束，它必被离散群中任何两个双曲元素满足。下面两个结果是要揭示简单与非简单双曲元素（定义8.1.5）之间的区别。然而，这些结果的应用却要比这广泛得多。事实上，它们涉及了两条轴的投影在商曲面上是否相交。

定理11.6.8 设g和h分别是具有轴A_g，A_h和平移长度T_g，T_h的双曲元素。假设$\langle g,h\rangle$离散、非初等且A_g和A_h相交成θ角。则

(1) $\sinh(\frac{1}{2}T_g)\sinh(\frac{1}{2}T_h)\sin\theta$

$$\geqslant \cos(3\pi/7) = 0.2225\cdots$$

事实上，除去 $\langle g,h\rangle$ 具有符号差 (0:2, 3, q)，(0: 2, 4, q) 或 (0: 2, 3, 4) 之一外，有

$$\sinh\left(\frac{1}{2}T_g\right)\sinh\left(\frac{1}{2}T_h\right)\sin\theta \geqslant \frac{1}{2} \tag{2}$$

并且若 $\langle g,h\rangle$ 不含椭圆元素或有一个无界基本域，则

$$\sinh\left(\frac{1}{2}T_g\right)\sinh\left(\frac{1}{2}T_h\right)\sin\theta \geqslant 1 \tag{3}$$

特别是，若g是 $\langle g,h\rangle$ 中的非简单双曲元素，则

$$\sinh\left(\frac{1}{2}T_g\right) \geqslant [\cos(3\pi/7)]^{1/2} (= 0.47\cdots)$$

［证］ 设u是A_g和A_h的交点，分别在A_g和A_h上构造点v和w使$\rho(u,v) = T_g/2$，$\rho(u,w) = T_h/2$，且使顶点为u，v，w的三角形在点u具有角θ。设f_u，f_v和f_w分别是以u，v和w为不动点的二阶椭圆元素。不妨假设（必要时g与h或g与h之一可用它们的逆元素代替）

$$g = f_v f_u,\quad h = f_w f_u,\quad gh^{-1} = f_v f_w$$

我们推出偶数个f_u，f_v和f_w的乘积必定属于 $\langle g,h\rangle$；故$\langle g,h\rangle$在$\langle f_u, f_v, f_w\rangle$中的指数是1或2，所以后者是离散的。

回顾一下11.5节的结果，可记

$$\sinh\left(\frac{1}{2}T_g\right)\sinh\left(\frac{1}{2}T_h\right)\sin\theta = \lambda$$

$$= \frac{1}{2}\left|\mathrm{tr}(f_u f_v f_w)\right|$$

实质上从定理11.5.2及其证明便得到定理11.6.8。首先，(1)正是推论11.5.3。若$\langle g,h\rangle$不含椭圆元素，则从定理7.39.4可得到(3)；若$\langle g,h\rangle$有一个无界基本域，则从定理11.5.2的情形（1）和情形（2）可得到（3）。

余下的是要证明（2）。根据定理11.5.2（3）我们看出，除去λ是形如$\cos(2\pi/q)$或$\cos(3\pi/q)$的情形外，（2）中的下界1/2成立。欲知何时会出现这种情形，需要检查一下定理11.5.2的证明。为了简便起见，记G^*为$\langle f_u,\ f_v,\ f_w\rangle$，$G$为$\langle g,h\rangle$。

参考定理11.5.2的证明，在此，只需考虑$p=2$和$p=3$的情形即可。然而G^*包含了三个二阶椭圆元素的乘积，它是$2\pi p/q$角的旋转。所以若$p=2$，则存在一个$2\pi/q$角的旋转r使得r^2是三个二阶旋转的乘积。由于$r\in G^*$，有$r\in G$。因此G包含了一个二阶旋转。在这种情形下，$G=G^*$，所以G具有符号差（0：2，3，q）或（0：2，4，q）。

余下的情形是$p=3$，这里G^*具有符号差(0：2，3，q)，其中（参看定理11.5.2的证明）$q=n=7$或8。关于面积的繁复计算表明，若G在G^*中的指数为2，则G的唯一可能的符号差为（0：3，3，4）。

关于非简单双曲元素的最后一个断言是(1)的一个应用，其中取h为g的一个共轭元素。 □

定理11.6.9 设g和h是分别具有轴A_g和A_h，平移长度T_g和T_h的双曲元素。如果$\langle g,h\rangle$离散、非初等且A_g和A_h的象不交，那么

$$\sinh\left(\frac{1}{2}T_g\right)\sinh\left(\frac{1}{2}T_h\right)\cosh\rho(A_g,A_h)$$

$$\geqslant \cosh\left(\frac{1}{2}T_g\right)\cos\left(\frac{1}{2}T_h\right)-\frac{1}{2}$$

若 $\langle g,h\rangle$ 没有椭圆元素，则我们可用 $+1$ 代替 $-1/2$（且用2代替这一下界）。

若 g 是 $\langle g,h\rangle$ 中的简单双曲元素，则这一结果可应用于 h 是 g 的任一共轭元素，比方说 fgf^{-1} 的情形。从而（由初等处理）得到下面的不等式。

推论11.6.10 假设 g 和 h 是生成一个离散、非初等群的双曲元素。若 g 是这个群中的简单双曲元素，则对 $\langle g,h\rangle$ 中的所有 f，要么 $f(A_g)=A_g$，要么

$$\sinh\left(\frac{1}{2}T_g\right)\sinh\frac{1}{2}\rho(A_g,fA_g)\geqslant\frac{1}{2}$$

这一界限是最佳的。

下面的例子说明下界1/2是最佳的。

例11.6.11 构造一个如图11.6.3所示的多边形 D，其中 f（二阶椭圆元素）和 g（双曲元素）使 D 的边配对。由Poincaré定理可知，D 是 $\langle g,h\rangle$ 的一个基本多边形。因 g 使 D 的边配对，故必是简单双曲元素。最后

$$\sinh\left(\frac{1}{2}T_g\right)\sinh\frac{1}{2}\rho(A_g,fA_g)$$

$$=\sinh\frac{1}{2}\rho(L,L')\sinh\rho(0,A_g)$$

$$=\cos(\pi/3)$$ □

〔定理11.6.9的证明〕 考虑图11.6.4，因 g（或 g^{-1}）为 $\sigma_3\sigma_1$，h（或 h^{-1}）为 $\sigma_2\sigma_3$，故 $\sigma_2\sigma_1$ 属于 G。若 G 不含椭圆元

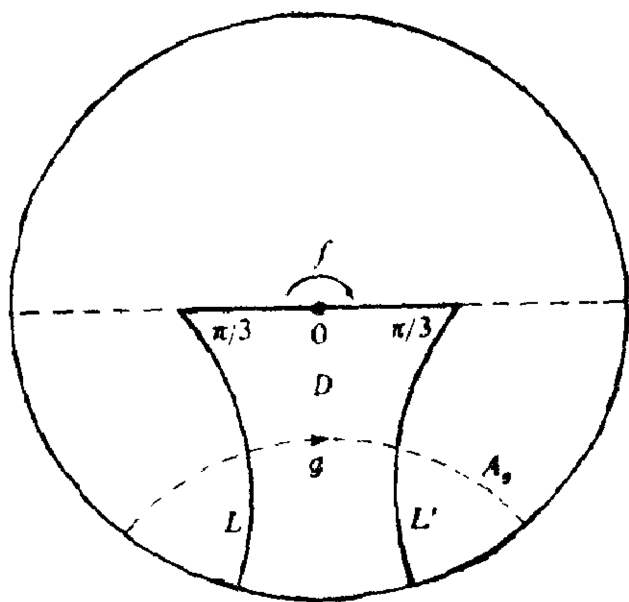


图 11.6.3

素，则L_1和L_2不可能相交（这一情形在图中没有说明），由定理7.19.2得到

$$\sinh(\frac{1}{2}T_g)\sinh(\frac{1}{2}T_h)\cosh\rho(A_g,A_h)$$

$$=\cosh(\frac{1}{2}T_g)\cosh(\frac{1}{2}T_h)+\cosh\rho(L_1,L_2)$$

这推出第二个不等式。

若L_1和L_2相交，比方说交成θ角。则对某互素的整数p和q，有$\theta=2\pi p/q$。若$\theta>2\pi/q$，则我们能把A_h绕交点旋转到它的一个象上去，这个象离A_g要近一些（但由假设，它们不交）．在以上讨论中，若以h的共轭fhf^{-1}代替h，使这个共轭元素的轴$f(A_h)$与A_g尽可能地接近（但不重合），则有

$$\rho(A_g,A_h)\geqslant\rho(A_g,fA_h)$$

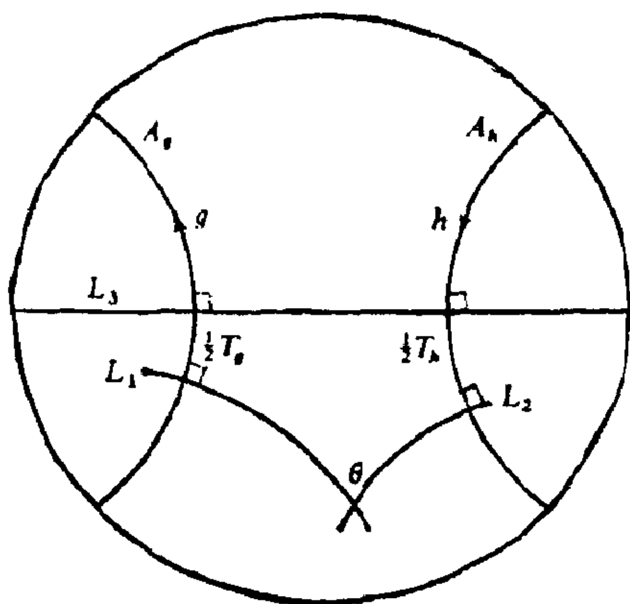


图 11.6.4

且由于显然$\theta<\pi$，可知对应的θ满足$\theta\leqslant 2\pi/q\leqslant 2\pi/3$。于是由定理7.18.1便得到第一个不等式，即

$$\sinh\left(\frac{1}{2}T_g\right)\sinh\left(\frac{1}{2}T_h\right)\cosh\rho(A_g,A_h)$$

$$\geqslant\cosh\left(\frac{1}{2}T_g\right)\cosh\left(\frac{1}{2}T_h\right)+\cos(2\pi/3) \qquad \square$$

由定理11.6.8和11.6.9可推出$P(g,h)$的界。

定理11.6.12 若g和h是生成一个离散非初等群的双曲元素，则$P(g,h)\geqslant\cos(3\pi/7)$。

〔证〕 若g和h的轴相交于w，则显然有(用定理11.6.8和11.6.9的记号)

$$P(g,h)=\sinh\frac{1}{2}\rho(w,gw)\ \sinh\frac{1}{2}\rho(w,hw)$$

$$=\sinh(\frac{1}{2}T_g)\sinh(\frac{1}{2}T_h)$$

$$\geqslant\cos(3\pi/7)$$

若A_g和A_h的任一象相交，则成立同样的不等式。若不然，则可应用定理11.6.9得到

$$\sinh\frac{1}{2}\rho(z,gz)\sinh\frac{1}{2}\rho(z,h\ )$$

$$=\sinh(\frac{1}{2}T_g)\sinh(\frac{1}{2}T_h)\cosh\rho(z,A_g)\cosh\rho(z,A_h)$$

$$\geqslant\frac{1}{2}\sinh(\frac{1}{2}T_g)\sinh(\frac{1}{2}T_h)\cosh[\rho(z,A_g)+\rho(z,A_h)]$$

$$\geqslant\frac{1}{2}\sinh(\frac{1}{2}T_g)\sinh(\frac{1}{2}T_h)\cosh\rho(A_g,A_h)$$

$$\geqslant\frac{1}{2}\left[\cosh(\frac{1}{2}T_g)\cosh(\frac{1}{2}T_h)-\frac{1}{2}\right]$$

$$\geqslant\frac{1}{4}$$

$$>\cos(3\pi/7)$$ □

最后，对一个是椭圆元素而另一个是双曲元素的情形考虑$M(g,h)$。

定理11.6.13 设g是双曲元素而h是q（$q\geqslant2$）阶椭圆元素。若$\langle g,h\rangle$离散、非初等，则$M(g,h)\geqslant1/\sqrt{8}$。

［证］ 若g是$\langle g,h\rangle$的非简单双曲元素，则（由定理11.6.8）

$$M(g,h)\geqslant\sinh(\frac{1}{2}T_g)$$

$$\geqslant [\cos(3\pi/7)]^{1/2}$$
$$> 1/\sqrt{8}$$

假设g是简单双曲元素。此时椭圆元素h的不动点v不可能位于A_g上，而且A_g的关于点v转角为$2\pi/q$的旋转必把A_g映到一个不交的象上，我们可设它是$h(A_g)$；参看图11.6.5.

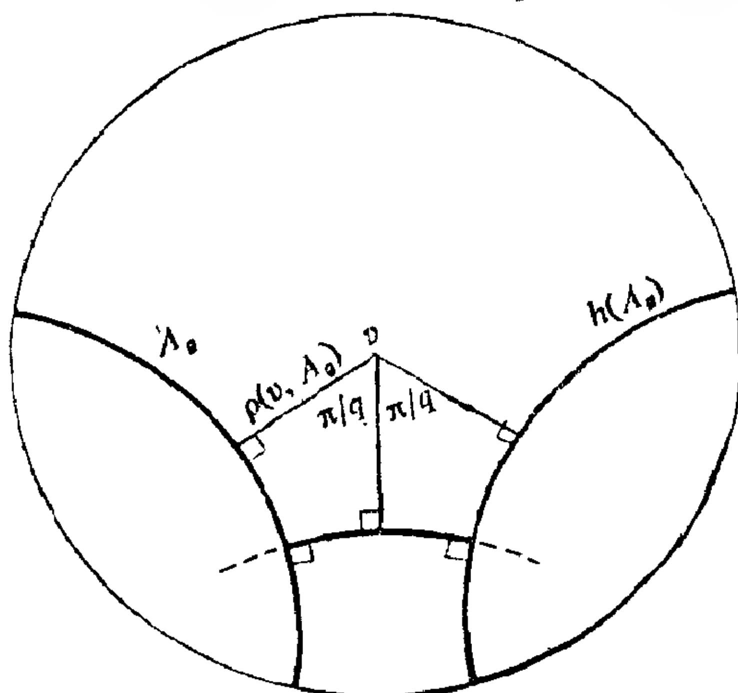


图 11.6.5

由7.17节有

$$\cosh \rho(v, A_g)\sin(\pi/q) = \cosh \frac{1}{2}\rho(A_g, hA_g)$$

$$\geqslant \sinh \frac{1}{2}\rho(A_g, hA_g)$$

且从推论11.6.10（应用于$\langle g, hgh^{-1}\rangle$），有

$$\sinh(\frac{1}{2}T_g)\sinh\frac{1}{2}\rho(A_g, hA_g) \geqslant \frac{1}{2}$$

故

$$\cosh\rho(v,A_g)\sin(\pi/q)\sinh(\frac{1}{2}T_g)\geqslant\frac{1}{2}$$

这表达了参数T_g，$2\pi/q$与由ρ（v，A_g）度量的g同h的分离状况之间的一种几何约束。记

$$m=\max\left\{\sinh\frac{1}{2}\rho(z,gz),\sinh\frac{1}{2}\rho(z,hz)\right\}$$

我们有

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}&\leqslant\sin(\pi/q)\sinh(\frac{1}{2}T_g)\cosh[\rho(v,z)+\rho(z,A_g)]\\&=\sin(\pi/q)\sinh(\frac{1}{2}T_g)[\cosh\rho(v,z)\cosh\rho(z,A_g)\\&\qquad+\sinh\rho(v,z)\sinh\rho(z,A_g)]\\&\leqslant m\sin(\pi/q)[1+\sinh^2\rho(v,z)]^{1/2}+m^2\\&\leqslant m[\sin^2(\pi/q)+m^2]^{1/2}+m^2\\&\leqslant m(1+m^2)^{1/2}+m^2\end{aligned}$$

这当然蕴含了$m\geqslant1/\sqrt{8}$。 □

把这一节中的所有结果综合在一起，便得到$M(g,h)$的一个通用的下界。

定理11.6.14 若g和h生成一个非初等离散群，则$M(g,h)\geqslant0.1318\cdots$，且这一下界由$(0;2,3,7)$-三角群的二个椭圆元素达到。

在结束本节之前，我们来完成定理11.2.4（2)的证明。

［定理 11.2.4（2）的证明］ 考虑由*Dirichlet*多边形边界上的四个顶点组成的偶然循环

$$v_1, f(v_1)=v_2,\quad g(v_1)=v_3,\quad h(v_1)=v_4$$

则v_j位于一个中心为w，半径为r的圆周上。若$\langle f, g\rangle$非初等，则如刚证明的那样，有

$$M(g,h)\geqslant 0.1318\cdots$$

故对某个j（$=2$或3）

$$0.1318\cdots \leqslant \sinh \frac{1}{2}\rho(v_1,v_j)$$

$$\leqslant \sinh \frac{1}{2}[\rho(v_1,w)+\rho(w,v_j)]$$

$$\leqslant \sinh r$$

这一事实对$\langle g,h\rangle$或$\langle h,f\rangle$非初等时也成立，故只要考虑所有三个群$\langle g,h\rangle$，$\langle h,f\rangle$和$\langle f,g\rangle$都是初等群的情形就够了。

设这三个2-生成元素群初等。由于v_1，v_2和v_3共圆，故$\langle f,g\rangle$要么是具有椭圆生成元的循环群，要么由两个二阶椭圆元素生成。第一种情形不可能出现（否则椭圆生成元以w为不动点），在第二种情形中，f和g之一，比方说g必是二阶椭圆元素。类似的讨论对另外两个群也成立，所以不失一般性，可设g和h都是二阶椭圆元素。

若f是双曲元素，则由$\langle f,g\rangle$和$\langle f,h\rangle$初等，可知f的轴包含g和h的不动点且$\langle f,g,h\rangle$初等。若f是二阶椭圆元素，则f,g,h的三个不动点w_f，w_g，w_h要么共线，$\langle f,g,h\rangle$仍为初等群；要么不共线，此时$\langle f,g,h\rangle$为非初等群。

若$\langle f,g,h\rangle$非初等，则由11.5节有

$$\sinh \rho(w_f,w_g)\sinh \rho(w_f,w_h)\geqslant\lambda$$

$$\geqslant\cos(3\pi/7)$$

但

$$\rho(w_f,w_g)\leqslant\rho(w_f,v_1)+\rho(v_1,w_g)$$

$$= \frac{1}{2}\rho(v_1, v_2) + \frac{1}{2}\rho(v_1, v_3)$$

$$\leqslant \frac{1}{2}[\rho(v_1, w) + \rho(w, v_2) + \rho(v_1, w) + \rho(w, v_3)]$$

$$= 2r$$

所以在这一情形下

$$\sinh^2(2r) \geq \cos(3\pi/7)$$

余下的情形是$\langle f, g, h\rangle$初等。我们将证明这不可能出现。不妨设这个群作用在H^2上且$\langle f, g, h\rangle$使正虚轴保持不变。不在虚轴上的任何一点的轨道可设为

$$\{\cdots, z_{-1}, z_0, z_1, \cdots\} \cup \{\cdots, w_{-1}, w_0, w_1, \cdots\}$$

如图11.6.6所示，且对其中的每个j有

$$\rho(z_j, z_{j+1}) = \rho(w_j, w_{j+1}) = t$$

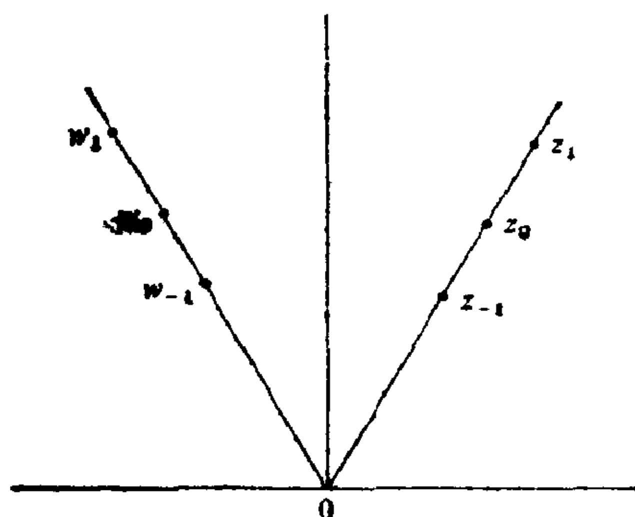


图 11.6.6

现在回顾一下，为使从这条轨道中选出的四点v_1, v_2, v_3, v_4位于一个以w为中心的*Dirichlet*多边形的边界上，这四点

必定是该轨道中与w最接近的点（与w点等距）。初等的度量与几何关系表明仅当中心w位于正虚轴上，$|z_0|=|w_0|$（经重新标号后）且

$$\{v_1, v_2, v_3, v_4\} = \{z_0, z_1, w_0, w_1\}$$

时，这一情形才会出现（考虑$[v_i, v_j]$的平分线；它们必相交于w点）。假设$v_1 = z_0$，$v_2 = w_1$（对其它的可能，可作类似的讨论），则w是$[v_1, v_2]$的中点且f必是把v_1映为v_2的二阶椭圆元素。由此推出f必以w为不动点，矛盾。 □

习题 11.6

1．在定理11.6.1(i)的情形中有$M(g,h)\geqslant 1/2$。试利用例11.6.2证明这是最佳估计。

2．假设$\langle f, g\rangle$初等，试证明：若v，fv，gv是以w为中心的一个圆周上的不同点，则要么

(i) f和g是以w为不动点的椭圆元素，要么

(ii) f和g之一是二阶椭圆元素(它们不可能都是双曲元素)。

3．考虑图11.6.3，试利用关于L和A的实、虚两条直径的反射证明$f^{-1}g$是以D的一个顶点为不动点的三阶椭圆元素。

4．设G是一个(p, q, r)-三角群。假定G包含以u为不动点的p阶元素g和以v为不动点的q阶元素f。试证明

$$\cosh\rho(u,v)\geqslant\frac{\cos(\pi/p)\cos(\pi/q)+\cos(\pi/r)}{\sin(\pi/p)\sin(\pi/q)}$$

(在定理11.6.6的证明中已用到这一结果)。提示：构造四个角为$2\pi/p$(在u点)，$2\pi/q$(在v点)，θ，θ的四边形，它包含G的一个基本域。

5．设G是模群，g是G中的双曲元素且具有轴A和平移长度T_g。设N_g是A的这样的象的个数，这些象与A上一段长度为T_g的固定线段相交。试证明：象之间的平均间隙，即N_g/T_g可任意小；更精确地

说，是要证明

$$\inf_g N_g/T_g=0$$

6．设g是一个不含椭圆元素的$Fuchs$群内的非简单双曲元素。试证明若g具有平移长度T，则$\sinh(T/2)\geqslant 1$。

§ 11.7　典型域与商曲面

请读者回顾一下等距映射g的典型域Σ_g的几何定义（参看7.37节）；其分析定义是

$$\Sigma_g=\left\{z:\sinh\frac{1}{2}\rho(z,gz)<\frac{1}{2}|\operatorname{tr}(g)|\right\}$$

若g是抛物元素，则

$$\Sigma_g=\left\{z:\sinh\frac{1}{2}\rho(z,gz)<1\right\}\tag{11.7.1}$$

而若g是具有轴A和平移长度T的双曲元素，则

$$\Sigma_g=\left\{z:\sinh\rho(z,A)\sinh\left(\frac{1}{2}T\right)<1\right\}\tag{11.7.2}$$

因为在此情形中，Σ_g由

$$\sinh\frac{1}{2}\rho(z,gz)=\sinh\left(\frac{1}{2}T\right)\cosh\rho(z,A)$$

$$<\cosh\left(\frac{1}{2}T\right)\tag{11.7.3}$$

给出。

对某些没有椭圆元素的$Fuchs$群G，几乎任何黎曼曲面R都共形等价于Δ/G. Δ上的双曲度量投影到Δ/G，从而转

移到R上。记住这一事实，下面的结果给出了关于R的度量结构的定量信息。

定理11.7.1 设G是不含椭圆元素的Fuchs群，假设g和h属于G。

(1) 若g和h是具有不同不动点的抛物元素，则Σ_g和Σ_h不交。

(2) 若g是抛物元素，而h是G的简单双曲元素，则Σ_g和Σ_h不交。

(3) 若g和h都是G的简单双曲元素，其轴不交，则Σ_g和Σ_h不交。

实质上，这意味着R上的每个孔位于一个开圆盘内，R上的每条简单闭测地回路位于一个开“轴环”内，这些圆盘互不相交，或与这些轴环不相交。当对应的回路不交时，两个轴环也不交。而且通过计算典型域的大小，我们可以知道圆盘和轴环的大小，其每一个都是极限圆域或超圆域与G的循环子群的商。顺便指出，定理11.7.1还可应用于边界双曲元素。

〔证〕 对不含椭圆元素的Fuchs群，有（定理8.3.1）

$$\sinh\frac{1}{2}\rho(z,gz)\sinh\frac{1}{2}\rho(z,hz)\geqslant 1$$

其中$\langle g,h\rangle$非初等。考虑到(11.7.1)，这证明了(1)。关于(1)的几何证明，可设

$$g(z)=z+1,\quad h(z)=\frac{z}{cz+1}$$

h和h^{-1}的等距圆周必位于带域$|x|<1/2$内（否则G含椭圆元素），而这即意味着用几何方法构造的Σ_g与Σ_h不交。

我们将给出（2）的一个几何证明；分析证明很复杂且需要不等式

$$\sinh\left(\frac{1}{4}T_h\right)\sinh\frac{1}{2}\rho(A_h,gA_h)\geqslant 1$$

参看定理8.2.1的证明。希望读者补充其细节。

关于几何证明，设$g(z)=z+1$，作h的轴A和测地线L_1，L_2，L_3和L_4，如图11.7.1。

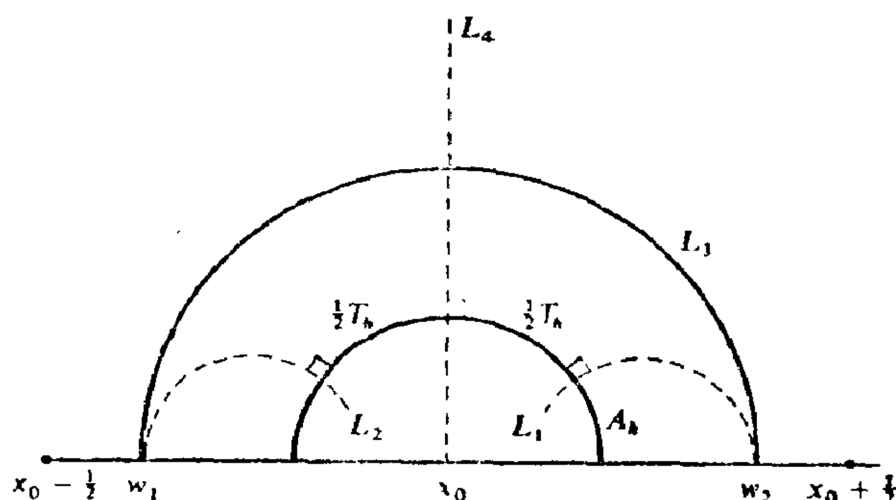


图 11.7.1

显然$\sigma_1\sigma_4$和$\sigma_2\sigma_4$是h或h^{-1}。L_1不可能与直线$x=x_0+1/2$相交，L_2不可能与直线$x=x_0-1/2$相交，因为否则G将包含椭圆元素。

此外，A_h不可能与直线$x=x_0-1/2$和$x=x_0+1/2$相交，因否则A_h的欧氏半径将大于1/2从而A_h与$g(A_h)$相交（与h是简单元素的事实矛盾）。故实区间〔w_1，w_2〕严格地位于实区间〔$x_0-1/2$，$x_0+1/2$〕内。h的典型域被切于L_3的超圆所界，这个超圆以A_h的端点为端点（因$h(L_2)=L_1$）；

g的典型域在以$x_0-1/2, x_0+1/2$为端点的测地线的上方。所以$\Sigma_g \cap \Sigma_h=\phi$,这就证明了（2）.

为证明（3），考虑图11.7.2，其测地线L，L_1, L_2如图所示。注意到

$$g^{-1}(A_h)=\sigma_1\sigma(A_h)$$
$$=\sigma_1(A_h)$$

由h是简单双曲元素，可知L_1不能与A_h相交（否则$\sigma_1(A_h)$作为A_h的象与A_h相交），类似地，L_2不能与A_g相交。我们也知道L_1和L_2不交（因为$\sigma_2\sigma^2\sigma_1\in G$）。由此推出存在测地线$L^*$，使$L_1$和$g(L_1)$在$L^*$的一边而$L_2$和$h(L_2)$在$L^*$的另一边。考虑几何关系即可得出$\Sigma_g \cap \Sigma_h=\phi$。

关于（3）的分析证明，注意到由于L_1和L_2不交，有（定理7.19.2）

$$\cosh\rho(A_g, A_h)\sinh\left(\frac{1}{2}T_g\right)\sinh\left(\frac{1}{2}T_h\right)$$

$$\geqslant 1+\cosh\left(\frac{1}{2}T_g\right)\cosh\left(\frac{1}{2}T_h\right)$$

若$\Sigma_g \cap \Sigma_h \neq \phi$，则对交集中的某点$z$，（11.7.2）和（11.7.3）成立（对$h$也对$g$），所以

$$\sinh\left(\frac{1}{2}T_g\right)\sinh\left(\frac{1}{2}T_h\right)\cosh\rho(A_g, A_h)$$

$$<\sinh\left(\frac{1}{2}T_g\right)\sinh\left(\frac{1}{2}T_h\right)\cosh[\rho(z, A_g)+\rho(z, A_h)]$$

$$=\sinh\left(\frac{1}{2}T_g\right)\sinh\left(\frac{1}{2}T_h\right)[\cosh\rho(z, A_g)\cosh\rho(z, A_h)$$

$$+\sinh\rho(z,A_g)\sinh\rho(z,A_h)]$$

$$<\cosh(\frac{1}{2}T_g)\cosh(\frac{1}{2}T_h)+1$$

与定理7.19.2的应用矛盾。 □

我们甚至还可以建立关于具有椭圆元素的$Fuchs$群的有关典型域的结果。例如，我们有下面的结果。

定理11.7.2 设G是非初等、非三角$Fuchs$群。若g和h是G中的椭圆或抛物元素，则要么$\langle g,h\rangle$是循环群，要么典型域Σ_g和Σ_h不交。

〔证〕 可设g和h都是本原元素（这只能扩大Σ_g和Σ_h的范围）。作一条过g的不动点u和h的不动点v（或以其为端点）的测地线L。再作过u的测地线L_1和L_2，使它们关于L对称，且使$g(L_1)=L_2$；以显而易见的方式，采用过v点的L_3和L_4重复这种构作。假设L_j的标号使L_1和L_3位于L的同一边上，则$\langle g,h\rangle$是三角群，因此它就是G（定理10.6.6）。但

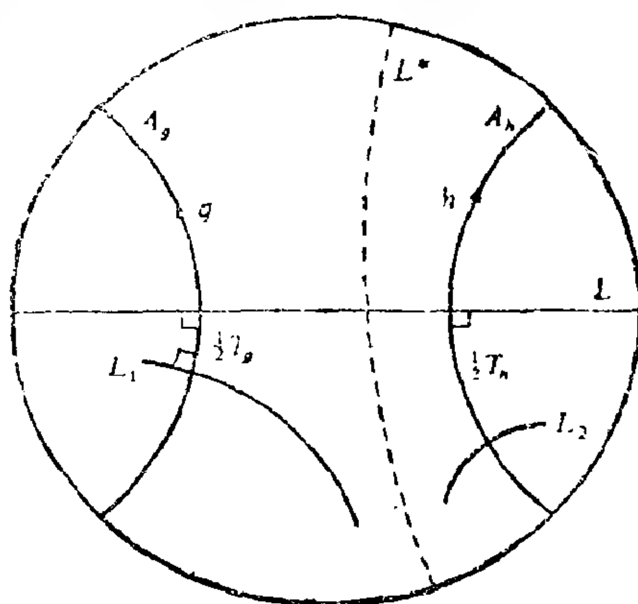


图 11.7.2

这是不可能的，故L_1和L_3不交。典型域的几何构成表明Σ_g与Σ_h不交。 □

习题 11.7

1．(i) 设g是具有典型域Σ_g的抛物元素。试证明

$$\text{h-area}(\Sigma_g/\langle g\rangle)=2$$

(ii) 设g是具有平移长度T的双曲元素。试证明$\Sigma_g/\langle g\rangle$的面积为$2T/\sinh(\frac{1}{2}T)$。

(iii) 设g是具有旋转角$2\pi/q$的椭圆元素，试证明$\Sigma_g/\langle g\rangle$的面积为

$$\frac{2\pi}{q}\left(\frac{1}{\sin(\pi/q)}-1\right)$$

且当$q\to+\infty$时它趋于2。

2．设G为非初等Fuchs群。在G的任一抛物元素的不动点w处，置

$$H_w=\left\{z:\ \sinh\frac{1}{2}\rho(z,gz)<\frac{1}{2}\right\}$$

其中g生成w的稳定核。试证明对所有抛物不动点u和v

$$H_u=H_v\ \text{或}\ H_u\cap H_v=\phi$$

并证明对G中的所有元素f均有

$$f(H_u)=H_{fu}$$

§ 11.8 注　　记

11.6节中的某些结果系由〔59〕，〔113〕给出；而关于纯代数处理，则可参看〔78〕，〔79〕，〔96〕。关于11.7节，

可参看〔12〕,〔37〕,〔43〕,〔64〕,〔87〕；对于*Fuchs*群的一系列几何结果,可查阅〔10〕,〔75〕,〔80〕,〔81〕,〔82〕,〔84〕和〔93〕。

参考文献

[1] Abikoff, W., The bounded model for hyperbolic 3-space and a uniformization theorem (preprint, 1981).

[2] Abikoff, W., Appel, K. and Schupp, P., Lifting surface groups to SL(2,*C*); *Proceedings of Oaxtepec Conference*, 1981.

[3] Ahlfors, L. V., Hyperbolic motions, *Nagoya Math. J.*, **29** (1967), 163-166.

[4] Ahlfors, L. V., *Conformal Invariants*, McGraw-Hill, New York, 1973.

[5] Ahlfors, L.V., Möbius transformations in several dimensions, *University of Minnesota Lecture Notes*, Minnesota, 1981.

[6] Ahlfors, L. V. and Sario, L., *Riemann Surfaces*, Princeton University Press. Princeton, 1960.

[7] Alexander, H. W., Vectorial inversive and non-Euclidean geometry, *Amer. Math. Monthly*, **74** (1967), 128-140.

[8] Beardon, A.F. and Maskit, B., Limit points of Kleinian groups and finite-

sided fundamental polyhedra, *Acta Math.*, **132** (1974), 1-12.

[9] Beardon, A.F. and Jorgensen, T., Fundamental domains for finitely generated Kleinian groups. *Math. Scand.*, **36** (1975), 21-26.

[10] Beardon, A.F., Hyperbolic polygons and Fuchsian groups, *J. London Math. Soc.*, **20** (1979).247-254.

[11] Beardon. A.F. and Waterman, P., Strongly discrete subgroups of SL(2,*C*). *J.London Math. Soc.*, **24** (1981),325-328.

[12] Beardon, A.F., Lie products, closed geodesics and Fuchsian groups, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **85** (1982), 87-90.

[13] Best, L.A., On torsion free discrete subgroups of PSL(2,*C*) with compact orbit space, *Can. J.Math.*, **23** (1971), 451-460.

[14] Brooks, R. and Matelski, J.P., The dynamics of 2-generator subgroups of PSL(2,*C*); *Annals of Math. Studies* 97. Princeton University Press, Princeton, 1980.

[15] Brooks, R.and Matelski, J.P., Collars in Kleinian groups, *Duke Math.J.* (to

appear).

[16] Bungaard, S. and Nielsen, J., On normal subgroups with finite index in F-groups, *Matematisk Tid. B*, 1951, 56-58.

[17] Cassels, J. W. S., An embedding theorem for fields, *Bull. Aust. Math. Soc.*, **14** (1976), 193-198.

[18] Cassels, J. W. S., An embedding theorem for fields: Addendum. *Bull. Aust. Math. Soc.*, **14** (1976), 479-480.

[61] Chen. S. S., Greenberg, L., Hyperbolic spaces; *Contributions to Analysis* (edited by L. V. Ahlfors. I. Kra, B. Maskit and L. Nirenberg). Academic Press. New York, 1974.

[20] Chevalley, C., *Theory of Lie Groups*, Princeton University Press. Princeton, 1946.

[21] Coxeter, H. S. M., The inversive plane and hyperbolic space. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **29** (1966), 217-242.

[22] Coxeter, H. S. M., Inversive distance, *Ann. Mat. Pura Appl.*, **71** (1966), 73-83.

[23] Curtis, M. L., Matrix groups, *Universitext*, Springer-Verlag, New York, 1979.

[24] De Rham, G., Sur les polygones générateurs des groupes Fuchsiens, *l' Enseignemem Math.*, 17(1971).49-62.

[25] Dold, A.and Eckmann, B.(editors), A crash course in Kleinian groups, *Lecture Notes in Mathematics* 400, Springer-Verlag, New York, 1974.

[26] Du Val, P., *Homographies, Quaternions and Rotations*, Clarendon Press, Oxford, 1964.

[27] Edmonds, A.L., Ewing, J.H.and Kulkarni, R.S., Torsion free subgroups of Fuchsian groups and tesselations of surfaces, *Invent.Math.*(to appear).

[28] Farkas, H.M. and Kra, I., *Riemann Surfaces*, Graduate Texts in Mathematics 71, Springer-Verlag, New York, 1980.

[29] Fenchel, W.and Nielsen, J., On discontinuous groups of isometric transformations of the non-Euclidean plane; *Studies and Essays Presented to R.Courant*, Interscience, New York, 1948.

[30] Ford, L.R., *Automorphic Functions* (Second Edition), Chelsea, New Nork,

1951.

[31] Fox, R.H., On Fenchel's conjecture about F-groups, *Matematisk Tid. B*, 1952, 61-65.

[32] Gans, D., *An Introduction to Non-Euclidean geometry*, Academic Press, New York, 1973.

[33] Greenberg, L., Discrete subgroups of the Lorentz group, *Math. Scand.* **10** (1962), 85-107.

[34] Greenberg, L., Fundamental polygons for Fuchsian groups, *J.d' Analyse Math.*, **18** (1967), 99-105.

[35] Greenberg, L., Finiteness theorems for Fuchsian and Kleinian groups; *Discrete Groups and Automorphic Functions* (edited by W.J.Harvey), Academic Press, London, 1977.

[36] Gruenberg, K.W.and Weir, A.J., *Linear Geometry*, Van Nostrand, Princeton, 1967.

[37] Halpern, N., A proof of the Collar Lemma, *Bull. London Math. Soc.*, **13** (1981), 141-144.

[38] Heins, M., Fundamental polygons of Fuchsian and Fuchsoid groups, *Ann.*

Acad.Sci.Fenn., 1964, 1-30.

[39] Higgins, P. J., An introduction to topological groups; *London Mathematical Society Lecture Note Series* 15, Cambridge University Press, Cambridge, 1974.

[40] Jorgensen, T.and Kiikka, M., Some extreme discrete groups, ***Ann.Acad.Sci. Fenn.,Ser.A***, **1** (1975), 245-248.

[41] Jorgensen, T., On discrete groups of Möbius transformations, *Amer.J. Math.*, **98** (1976), 739-749.

[42] Jorgensen, T., A note on subgroups of SL(2, C), *Quart.J.Math.Oxford Ser. II*, **28** (1977), 209-212.

[43] Jorgensen, T., Closed geodesics on Riemann surfaces, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **72** (1978),140-142.

[44] Jorgensen, T., Comments on a discreteness condition for subgroups of SL (2, C),*Can.J.Math.*,**31** (1979),87-92.

[45] Jorgensen, T., Commutators in SL (2,C); Riemann surfaces and related topics, *Annals of Math.Studies* 97, Princeton University Press, Princeton, 1980.

[46] Keen, L., Canonical polygons for finitely generated Fuchsian groups, *Acta Math.*, **115**(1966),1-16.

[47] Keen, L., On infinitely generated Fuchsian groups, *J.Indian Math.Soc.*, **35** (1971),67-85.

[48] Knapp, A.W., Doubly generated Fuchsian groups, *Michigan Math.* J., **15** (1968), 289-304.

[49] Knopp,M.I.and Newman,M., Cougrnence subgroups of positive genus of the Modular group,*Ill.J.Math.*, (1965), 577-583.

[50] Kra, I.,*Automorphic Forms and Kleinian Groups*, Benjamin, Reading, Mass., 1972.

[51] Lehner, J.,Discontinuous groups automorphic functions; *Mathematical Surveys,Number VIII*,American Math. Soc.,Providence,1964.

[52] Lehner, J.,*A Short Course in Automorphic Functions*, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1966.

[53] Lyndon,R.C.and Ullman, J.L.,Groups of elliptic linear fractional transformations, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **18**

(1967),1119-1124.

[54] Macbeath, A.M., Packings, free products and residually finite groups, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **59**(1963), 555-558.

[55] Macbeath, A.M., The classification of non-Euclidean plane crystdllographic groups, *Can. J. Math.*, **19**(1967), 1192-1205.

[56] Macbeath, A.M.and Hoare.A.H.M., Groups of hyperbolic crystallography, *Math.Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **79** (1976), 235-249.

[57] Magnus, J.W., *Non-Euclidean Tesselations and Their Groups*, Academic Press, New York, 1974.

[58] Marden, A., On finitely generated Fuchsian groups. *Comment. Math. Helritici*, **42** (1967), 81-85.

[59] Marden, A., Universal properties of Fuchsian groups in the Poincaré metric; Discontinuous groups and Riemann surfaces, *Annals of Math. Studies* 79. Princeton University Press, Princeton, 1974.

[60] Maskit, B., On Klein's combination theorem, *Trans. Amer.Math.Soc*, **120** (1965), 499-509.

[61] Maskit, B., On Klein's combination theorem II, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **131** (1968), 32-39.
[62] Maskit, B., On Poincaré's theorem for fundamental polygons, *Adv. in Math.*, **7** (1971), 219-230.
[63] Massey, W.S., *Algebraic Topology: An Introduction*: Graduate Texts in Mathematics 56, Springer-Verlag, New York, 1967.
[64] Matelski, J.P., A compactness theorem for Fuchsian groups of the second kind, *Duke Math. J.*, **43** (1976), 829-840
[65] Matelski, J.P., The classification of discrete 2-generator subgroups of PSL(2, C), *Israel J. Math.* (to appear).
[66] Meschkowski, H., *Noneuclidean Geometry*, Academic Press, New York. 1964.
[67] Millman, R.S., Kleinian transformation geometry, *Amer. Math. Monthly*, **84** (1977), 338-349.
[68] Milnor, J., Hyperbolic geometry: the first 150 years, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **6** (1982), 9-24.
[69] Montgomery, D. and Zippin, L., *Topological Transformation Groups*. Inter-

science, New York, 1955.

[70] Natanzon, S.M., Invariant lines of Fuchsian groups, *Russian Math. Surveys*, **27** (No.4,1972),161-177.

[71] Nicholls, P.J.and Zarrow, R.,Convex fundamental regions for Fuchsian groups,*Math.Proc.Cambridge Phil.Soc.*, **84** (1978),507-518.

[72] Nicholls,P.J.and Zarrow, R., Convex fundamental regions for Fuchsian groups II, *Math.Proc. Cambridge Phil Soc.* **86**(1979)295-300.

[73] Nicholls,P.J.,Garnett points for Fuchsian groups, *Bull.London Math.Soc.*, **12**(1980), 216-218.

[74] Patterson, S.J.,On the cohomology of Fuchsian groups, *Glasgow Math.J.*, **16**(1975).123-140.

[75] Patterson,S.J., Diophantine approximation in Fuchsian groups, *Phil. Trans.Roy.Soc.London*,**282**(1976),527-563.

[76] Peczynski, N., Rosenberger, G. and Zieschang,H.,Uber Erzeugende ebener diskontinuierlicher Gruppen, *Invent. Math.*,**29**(1975),161-180.

[77] Poincaré,H.,Theorie des groupes Fu-

chsiens, *Acta Math.*, **1** (1882), 1-62.

[78] Pommerenke, Ch. and Purzitsky, N., On the geometry of Fuchsian groups (preprint 1981).

[79] Pommerenke, Ch. and Purzitsky, N., On some universal bounds for Fuchsian groups (preprint. 1981).

[80] Purzitsky, N., Two generator Fuchsian groups of genus one, *Math. Zeit.*, **128** (1972), 245-251.

[81] Purzitsky, N., Two generator discrete free products, *Math. Zeil.*, **126** (1972), 209-223.

[82] Purzitsky, N., Correction to: two generator Fuchsian groups of genus one, *Math. Zeit.*, **132** (1973), 261-262.

[83] Purzitsky, N., Canonical generators of Fuchsian groups, *Ill. J. Math.*, **18** (1974), 484-490.

[84] Purzitsky, N., All two generator Fuchsian groups, *Math. Zeit.*, **147** (1976), 87-92.

[85] Purzitsky, N., A cutting and pasting of non-compact polygons with applications to Fuchsian groups, *Acta Math.*, **143** (1979), 233-250.

[86] Purzitsky.N.,Quasi Fricke polygons and the Nielsen convex region, *Math. Zeil.*,**172**(1980).239-244.

[87] Randol,B.,Cylinders in Riemann surfaces, *Comment. Math. Helvitici*, **54** (1979),1-5.

[88] Reade,M., O., On certain conformal maps in space, *Michigan Math. J.*, **4**(1957),65-66.

[89] Rosenberger, G., Eine Bemerkung zu einer Arbeit von T. Jorgensen, *Math Zeit.*, **165**(1979),261-265.

[90] Rudin,W.,*Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill,New York,1966.

[91] Schwarzenberger,R.L.E.,N-dimensional crystallography, *Research Notes in Mathematics* 41,Pitman.London,1980.

[92] Selberg,A.,On discontinuous groups in higher-dimensional spaces; *Contributions to Function Theory*,Tata Institute,Bombay,1960.

[93] Shinnar,M. and Sturm,J.,The maximal inscribed ball of a Fuchsian group; Discontinuous groups and Riemann surfaces, *Annals of Math. Studies* 79, Princeton University Press,

Princeton,1974.

[94] Siegel, C. L., Discontinuous groups, *Ann.of Math.*,**44**(1943),674-689.

[95] Siegel. C. L., Bemerkung zu einem Satze von Jakob Nielsen, *Mat. Tidsskrift B*. 1950.66-70.

[96] Siegel, C.L., Ubereinige Ungleichungen bei Bewegungsgruppen in der nichteuklidischen Ebene, *Math. Ann.*, **133**(1957),127-138.

[97] Singerman,D.,Subgroups of Fuchsian groups and finite permutation groups, *Bull. London Math.Soc.*,**2**(1970),319-323.

[98] Singerman,D., On the structure of non Euclidean crystallographic groups, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **76** (1974), 233-240.

[99] Sorvali, T., On discontinuity of Möbius groups without elliptic elements, *Univ. Joensuu,Ser.B*,**9**(1974),1-4.

[100] Springer, G., *Introduction to Riemann Surfaces*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1957.

[101] Thurston, W., The geometry and topology of 3-manifolds.*Lecture notes*, Princeton, 1980.

[102] Tietze, H., Über Konvexheit in kleinen und im grossen und über gewisse den Punkten einer Menge zugeordnete Dimensionzahlen, *Math. Zeit.*, 28(1928), 697-707.

[103] Tsuji, M., *Potential Theory in Modern Function Theory*, Maruzen, Tokyo. 1959.

[104] Tukia, P., On torsionless subgroups of infinitely generated Fuchsian groups, *Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A*, **4** (1978-79), 203-205.

[105] Väisälä, J., Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings: *Lecture Notes in Mathematics* 229, Springer-Verlag, New York, 1971.

[106] Wang, H., Discrete nilpotent subgroups of Lie groups, *J. Diff. Geometry*, **3** (1969), 481-492.

[107] Weyl, H., *Symmetry*, Princeton University Press, Princeton, 1952.

[108] Wielenberg, N. J., Discrete Möbius groups, fundamental polyhedra and convergence, *Amer. J. Math.*, **99**(1977), 861-877.

[109] Wielenberg, N.J., On the limit set

of discrete Möbius groups with finite sided polyhedra (preprint, 1976).

[110] Wilker, J. B., Inversive geometry; *The Geometric Vein* (edited by C. Davis, B. Grünbaum and F.A. Scherk), Springer-Verlag, New York, 1981.

[111] Wolf, J., *Spaces of Constant Curvature*, McGraw-Hill, New York. 1967.

[112] Wylie, C.R., *Foundations of Geometry*, McGraw-Hill, New York. 1964.

[113] Yamada, A., On Marden's universal constant of Fuchsian groups. *Kodai Math. J.*, **4**(1981), 266-277.

[114] Zieschang, H., Vogt, E. and Coldewey, H., Surfaces and planar discontinuous groups; *Lecture Notes in Mathematics* 835, Springeer-Verlag, New York. 1980.

名词索引

三　画

四　画

五　画

六　画

七　画

八　画

九　画

十　画

十 一 画

十 二 画

十三画以上

其　它